Boolesche (Schalt-) Algebra (1)

Definition 1:

Sei $\mathrm{B} = S_2 = \{0,1\}$ das Alphabet mit den Elementen 0 und 1.
Seien auf B die folgenden 3 Operatoren definiert für $x, y \in \mathrm{B}$:

$$
\begin{aligned}
x + y &\coloneqq \max(x, y) \\
x \cdot y &\coloneqq \min(x, y) \\
\overline{x} &\coloneqq 1 - x
\end{aligned}
$$

Dann ist $(\mathrm{B}, +, \cdot, ^{-} ,0 ,1)$ eine *Boolesche Schaltalgebra*.

Die Elemente $\{0,1\}$ werden neutrale Elemente genannt.

Besteht das Alphabet B aus mehr als den neutralen Elementen, so wird die darauf basierende Algebra als *Boolesche Algebra* bezeichnet.

Boolesche (Schalt-) Algebra (2)

Satz 1:

In dieser Algebra gelten folgende Rechengesetze

- Kommutativgesetz: $x + y = y + x$ $\quad x \cdot y = y \cdot x$
- Assoziativgesetz: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Distributivgesetz $x \cdot (y + z) = xy + xz$ $\quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- Komplementgesetz: $x + \overline{x} = 1$ $\quad x \cdot \overline{x} = 0$
- Idempotenzgesetz: $x + x = x$ $\quad x \cdot x = x$ $\quad \overline{\overline{x}} = x$
- Gesetz vom kleinsten und größten Element: $x + 0 = x$ und $x + 1 = 1$ $\quad x \cdot 0 = 0$ und $x \cdot 1 = x$
- de Morgansche Regeln: $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

Boolesche (Schalt-) Algebra (3)

Definition 2:

Seien $n, m \in \mathrm{N}$ mit $n, m \geq 1$. Dann heißt eine Funktion $f: \mathrm{B}^n \rightarrow \mathrm{B}^m$ eine *Schaltfunktion.*

Definition 3:

Eine Schaltfunktion $f: \mathrm{B}^n \rightarrow \mathrm{B}$ heißt (n-stellige) *Boolesche Funktion.*

Definition 4:

Sei $f: \mathrm{B}^n \rightarrow \mathrm{B}$ eine Boolesche Funktion und sei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{B}^n$. Dann heißt das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ der Elemente von $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein *Minterm* von f. Der Minterm heißt *einschlägig*, wenn

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$$

Boolesche (Schalt-) Algebra (4)

Satz 2:

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Summe ihrer einschlägigen Minterme.

Definition 5:

Sei $f\colon \mathrm{B}^n \rightarrow \mathrm{B}$ eine Boolesche Funktion und sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}^n$. Dann heißt die Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ der Elemente von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein *Maxterm* von f. Der Maxterm heißt *nullschlägig*, wenn

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Satz 3:

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Produkt ihrer nullschlägigen Maxterme.

Boolesche (Schalt-) Algebra (5)

Definition 6:

Die Darstellung einer Booleschen Funktion durch einschlägige Minterme heißt auch *disjunktive Normalform* (*DNF*) einer Booleschen Funktion.

Definition 7:

Enthalten die Minterme einer DNF jeweils *alle Eingangsvariablen*, so ist es eine *kanonisch disjunktive Normalform* (*KDNF*).

Definition 8:

Die Darstellung einer Booleschen Funktion durch nullschlägige Maxterme heißt auch *konjunktive Normalform* (*KNF*) einer Booleschen Funktion.

Definition 9:

Enthalten die Maxterme einer KNF jeweils *alle Eingangsvariablen*, so ist es eine *kanonisch konjunktive Normalform* (*KKNF*).

Boolesche (Schalt-) Algebra (6)

Sätze 2 und 3 ermöglichen das Auslesen der DNF bzw. der KNF aus einer Wahrheitstabelle, wie folgendes Beispiel zeigt:

c	b	a	y	**Minterm**	**Maxterm**
0	0	0	1	$\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$	
0	0	1	0		$c + b + \overline{a}$
0	1	0	0		$c + \overline{b} + a$
0	1	1	1	$\overline{c}\,b\,a$	
1	0	0	0		$\overline{c} + b + a$
1	0	1	1	$c\,\overline{b}\,a$	
1	1	0	0		$\overline{c} + \overline{b} + a$
1	1	1	1	$c\,b\,a$	

DNF $\quad y = \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} + \overline{c}\,b\,a + c\,\overline{b}\,a + c\,b\,a$

KNF $\quad y = (c + b + \overline{a})\big(c + \overline{b} + a\big)(\overline{c} + b + a)\big(\overline{c} + \overline{b} + a\big)$

Boolesche (Schalt-) Algebra (7)

Korollar 1:

Jede n-stellige Boolesche Funktion ist allein darstellbar durch die 2-stelligen Booleschen Funktionen „$+$“ und „ $\cdot$ “ sowie die 1-stellige Boolesche Funktion „ $\overline{}$ “.
Anders ausgedrückt: $\{+, \cdot, \overline{}\}$ ist *funktional vollständig.*

Korollar 2:

$\{+, \overline{}\}$ und $\{\cdot, \overline{}\}$ sind funktional vollständig.

Boolesche (Schalt-) Algebra (8)

Satz 4: $x + xy$

Beweis: $x + xy$	$= x\,1 + xy$	$x \cdot 1 = x$
	$= x\,(1 + y)$	Distributivgesetz
	$= x\,1$	$1 + y = 1$
	$= x$	$x \cdot 1 = x$

Satz 5: $x + \overline{x}y = x + y$

Beweis: $x + \overline{x}y$	$= (x + \overline{x})(x + y)$	Distributivgesetz
	$= 1 \cdot (x + y)$	Komplementgesetz
	$= x + y$	kleinstes Element

Satz 6: $xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$

Beweis: $xy + \overline{x}z + yz$	$= xy + \overline{x}z + yz(x + \overline{x})$	$x + \overline{x} = 1$, Komplementg.
	$= xy + \overline{x}z + xyz + \overline{x}yz$	Distributivgesetz
	$= xy(1 + z) + \overline{x}z(1 + y)$	Distributivgesetz
	$= xy(1) + \overline{x}z(1)$	größtes Element
	$= xy + \overline{x}z$	kleinstes Element

Boolesche (Schalt-) Algebra (9)

Satz 7: $(x+y)(\overline{x}+z) = xz + \overline{x}y$

Beweis: $(x+y)(\overline{x}+z) = x\overline{x} + xz + y\overline{x} + yz$ — Distributivgesetz

$= xz + y\overline{x} + yz$ — Komplementgesetz

$= xz + \overline{x}y$ — Satz 6

Satz 8: $(x+y)(\overline{x}+z)(y+z)$

$= (x+y)(\overline{x}+z)$

Beweis: $(x+y)(\overline{x}+z)(y+z)$

$= (xz + \overline{x}y)(y+z)$ — Satz 7

$= xyz + xzz + \overline{x}yy + \overline{x}yz$ — Distributivgesetz

$= xyz + xz + \overline{x}y + \overline{x}yz$ — Idempotenzgesetz

$= xz(y+1) + \overline{x}y(1+z)$ — Distributivgesetz

$= xz + \overline{x}y$ — gr. und kl. Element

$= (x+y)(\overline{x}+z)$ — Satz 7

Beispiel: Entwurf eines 2-bit - Multiplizierers

Boolesche (Schalt-) Algebra (11)

Wahrheitstabelle:

$x \cdot y = z$	x_1	x_0	y_1	y_0	z_3	z_2	z_1	z_0
$0 \cdot 0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$0 \cdot 1 = 0$	0	0	0	1	0	0	0	0
$0 \cdot 2 = 0$	0	0	1	0	0	0	0	0
$0 \cdot 3 = 0$	0	0	1	1	0	0	0	0
$1 \cdot 0 = 0$	0	1	0	0	0	0	0	0
$1 \cdot 1 = 1$	0	1	0	1	0	0	0	1
$1 \cdot 2 = 2$	0	1	1	0	0	0	1	0
$1 \cdot 3 = 3$	0	1	1	1	0	0	1	1
$2 \cdot 0 = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$2 \cdot 1 = 2$	1	0	0	1	0	0	1	0
$2 \cdot 2 = 4$	1	0	1	0	0	1	0	0
$2 \cdot 3 = 6$	1	0	1	1	0	1	1	0
$3 \cdot 0 = 0$	1	1	0	0	0	0	0	0
$3 \cdot 1 = 3$	1	1	0	1	0	0	1	1
$3 \cdot 2 = 6$	1	1	1	0	0	1	1	0
$3 \cdot 3 = 9$	1	1	1	1	1	0	0	1

Boolesche (Schalt-) Algebra (12)

Auslesen der DNF aus der Wahrheitstabelle und Minimierung

$z_3 = x_1 x_0 y_1 y_0$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= x_1 \bar{x}_0 y_1 \bar{y}_0 + x_1 \bar{x}_0 y_1 y_0 + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0 \\
&= x_1 \bar{x}_0 y_1 (\bar{y}_0 + y_0) + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0 && \text{Distributivgesetz} \\
&= x_1 \bar{x}_0 y_1 + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0 && \text{Komplementgesetz} \\
&= x_1 y_1 (\bar{x}_0 + x_0 \bar{y}_0) && \text{Distributivgesetz} \\
&= x_1 y_1 (\bar{x}_0 + \bar{y}_0) && \text{Satz 5} \\
&= x_1 \bar{x}_0 y_1 + x_1 y_1 \bar{y}_0 && \text{Distributivgesetz}
\end{aligned}
$$

Boolesche (Schalt-) Algebra (13)

$$z_1 = \bar{x}_1 x_0 y_1 \bar{y}_0 + \bar{x}_1 x_0 y_1 y_0 + x_1 \bar{x}_0 \bar{y}_1 y_0 + x_1 \bar{x}_0 y_1 y_0 + x_1 x_0 \bar{y}_1 y_0 + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0$$

$$= \bar{x}_1 x_0 y_1 (\bar{y}_0 + y_0) + x_1 \bar{x}_0 y_0 (\bar{y}_1 + y_1) + x_1 x_0 \bar{y}_1 y_0 + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0$$

Distributivgesetz

$$= \bar{x}_1 x_0 y_1 + x_1 \bar{x}_0 y_0 + x_1 x_0 \bar{y}_1 y_0 + x_1 x_0 y_1 \bar{y}_0$$ Komplementgesetz

$$= x_0 y_1 (\bar{x}_1 + x_1 \bar{y}_0) + x_1 y_0 (\bar{x}_0 + x_0 \bar{y}_1)$$ Distributivgesetz

$$= x_0 y_1 (\bar{x}_1 + \bar{y}_0) + x_1 y_0 (\bar{x}_0 + \bar{y}_1)$$ Satz 5

$$= \bar{x}_1 x_0 y_1 + x_0 y_1 \bar{y}_0 + x_1 \bar{x}_0 y_0 + x_1 \bar{y}_1 y_0$$ Distributivgesetz

$$z_0 = \bar{x}_1 x_0 \bar{y}_1 y_0 + \bar{x}_1 x_0 y_1 y_0 + x_1 x_0 \bar{y}_1 y_0 + x_1 x_0 y_1 y_0$$

$$= \bar{x}_1 x_0 y_0 (\bar{y}_1 + y_1) + x_1 x_0 y_0 (\bar{y}_1 + y_1)$$ Distributivgesetz

$$= \bar{x}_1 x_0 y_0 + x_1 x_0 y_0$$ Komplementgesetz

$$= x_0 y_0 (\bar{x}_1 + x_1)$$ Distributivgesetz

$$= x_0 y_0$$ Komplementgesetz

Boolesche (Schalt-) Algebra (14)

Ergebnis:

$$z_3 = x_1 x_0 y_1 y_0$$

$$z_2 = x_1 \bar{x}_0 y_1 + x_1 y_1 \bar{y}_0$$

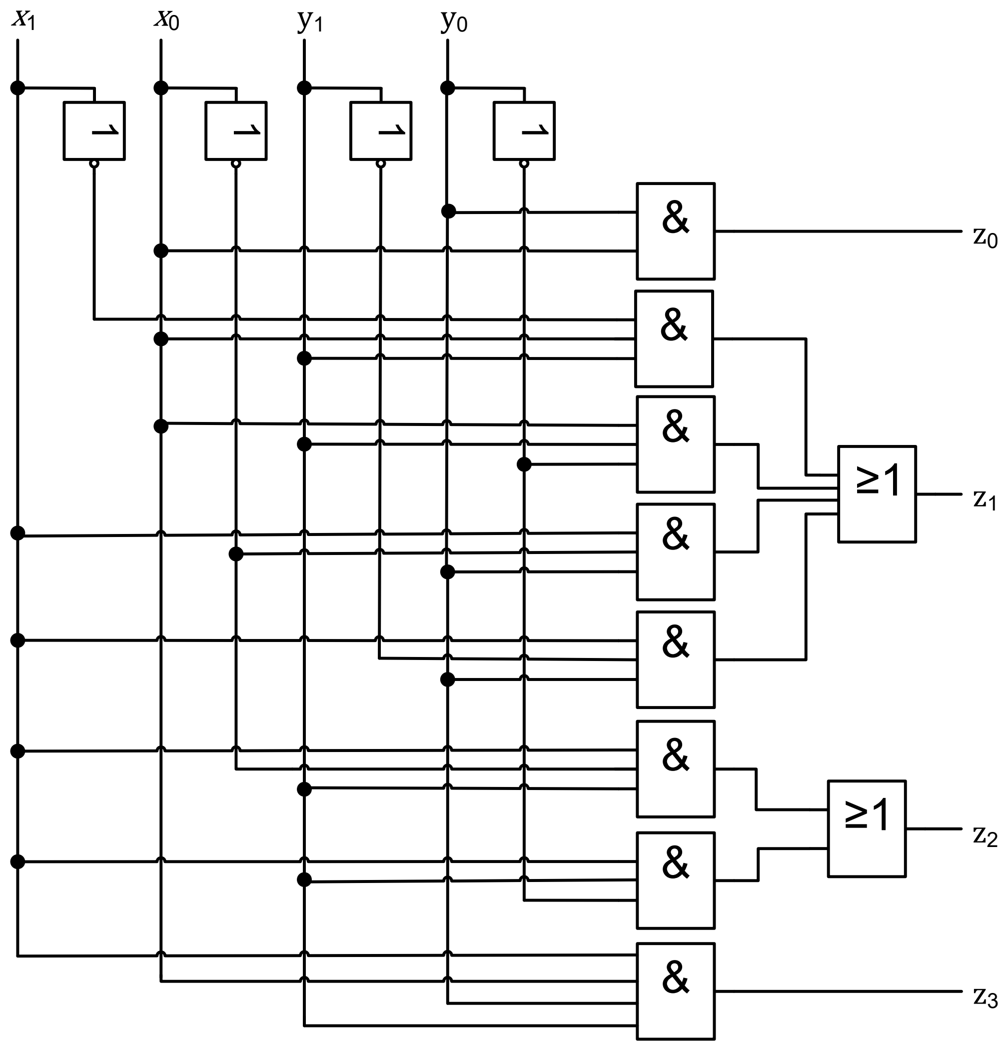
$$z_1 = \bar{x}_1 x_0 y_1 + x_0 y_1 \bar{y}_0 + x_1 \bar{x}_0 y_0 + x_1 \bar{y}_1 y_0$$

$$z_0 = x_0 y_0$$

- Negationen der Eingangsvariablen müssen nur einmal realisiert werden
- Verknüpfungen der Minterme werden mittels Mehrfach-AND realisiert
- Disjunktionen der Minterme werden durch Mehrfach-OR realisiert

Boolesche (Schalt-) Algebra (15)

Schaltnetz:



Boolesche (Schalt-) Algebra (16)

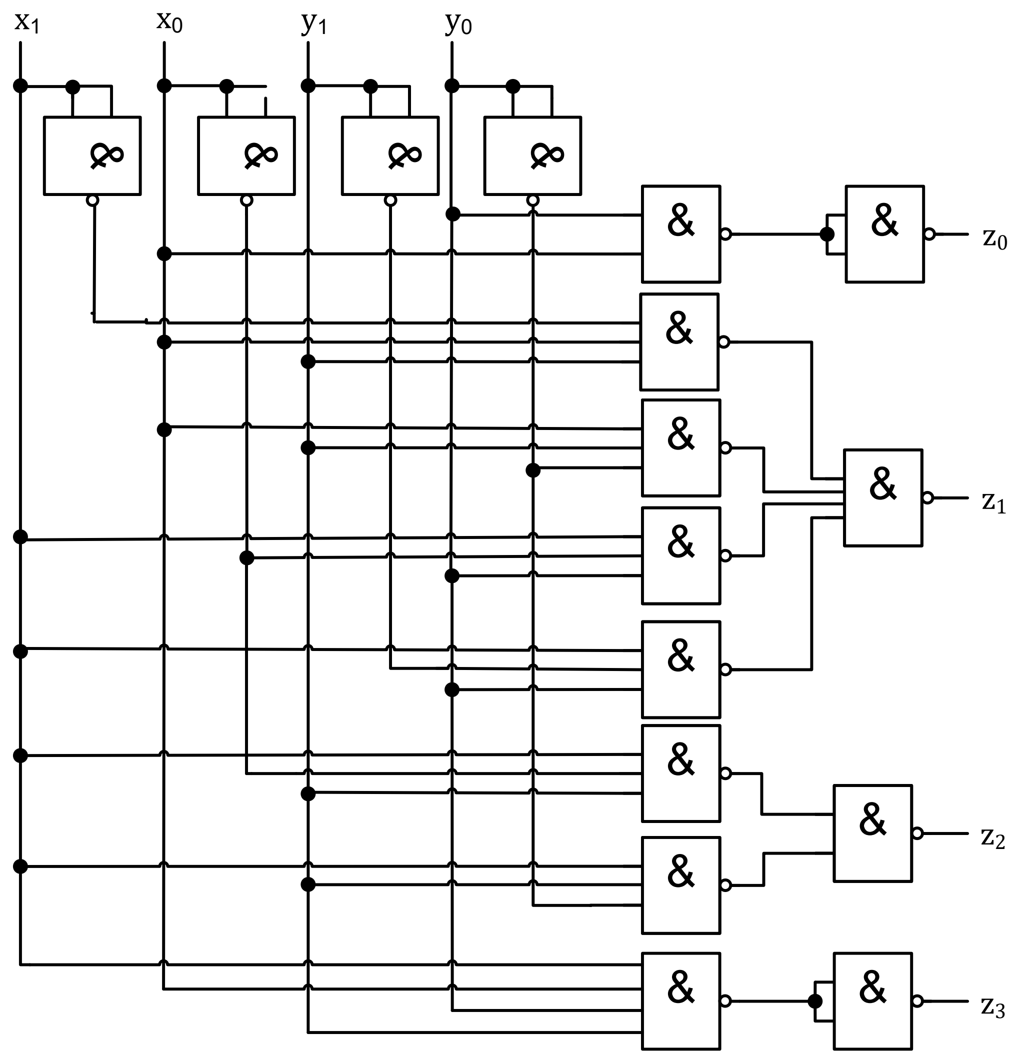
Ableitung einer Full-NAND-Struktur:

$$
\begin{aligned}
z_3 &= x_1 x_0 y_1 y_0 \\
&= \overline{\overline{x_1 x_0 y_1 y_0}} && \text{Idempotenzgesetz} \\
z_2 &= x_1 \bar{x}_0 y_1 + x_1 y_1 \bar{y}_0 \\
&= \overline{\overline{x_1 \bar{x}_0 y_1 + x_1 y_1 \bar{y}_0}} && \text{Idempotenzgesetz} \\
&= \overline{\overline{x_1 \bar{x}_0 y_1} \cdot \overline{x_1 y_1 \bar{y}_0}} && \text{De Morgan} \\
z_1 &= \bar{x}_1 x_0 y_1 + x_0 y_1 \bar{y}_0 + x_1 \bar{x}_0 y_0 + x_1 \bar{y}_1 y_0 \\
&= \overline{\overline{\bar{x}_1 x_0 y_1 + x_0 y_1 \bar{y}_0 + x_1 \bar{x}_0 y_0 + x_1 \bar{y}_1 y_0}} && \text{Idempotenzgesetz} \\
&= \overline{\overline{\bar{x}_1 x_0 y_1} \cdot \overline{x_0 y_1 \bar{y}_0} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_0 y_0} \cdot \overline{x_1 \bar{y}_1 y_0}} && \text{De Morgan} \\
z_0 &= x_0 y_0 \\
&= \overline{\overline{x_0 y_0}} && \text{Idempotenzgesetz}
\end{aligned}
$$

- Realisierung mittels Mehrfach-NAND
- Einzelne Negationen werden durch NAND mit zusammengeschalteten Eingängen realisiert

Boolesche (Schalt-) Algebra (17)

Schaltnetz:

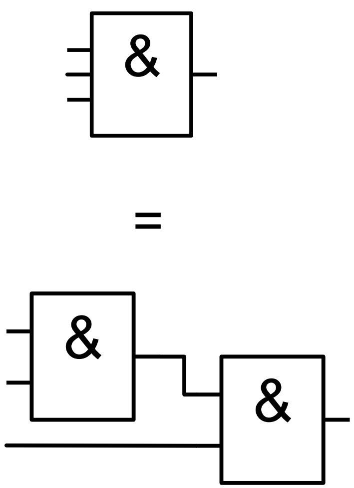


Wichtig: NAND (NOR) - Operation ist nicht assoziativ!

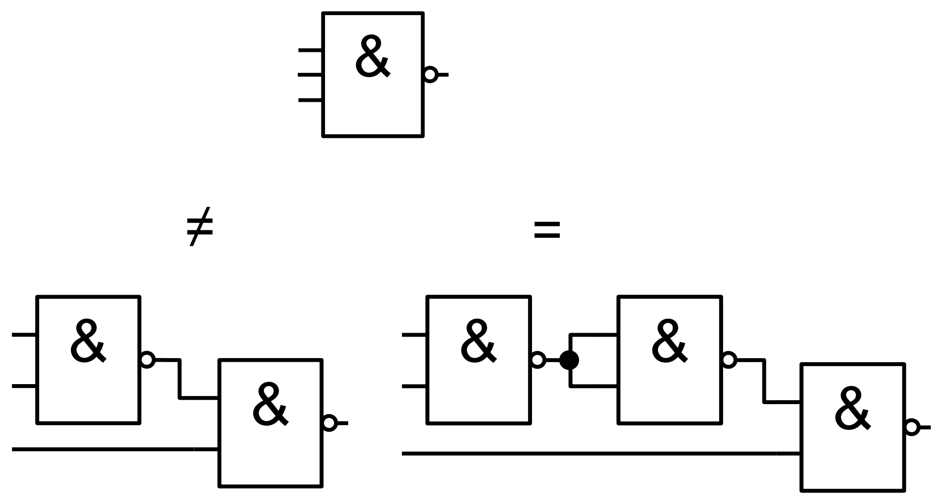
Logikentwurf mit NAND- und NOR-Gattern nicht immer geradlinig, z.B. bei der Realisierung von NAND-Funktionen mit n Variablen durch Standard m-input-NAND-Gatter ($n > m$)

Beispiel:

a) Realisierung eines 3-input-AND mit 2-input-Gattern



b) Realisierung eines 3-input-NAND mit 2-input-Gattern



Falsch

Richtig

Boolesche (Schalt-) Algebra (19)

- **Zusammenfassung**
  - Schaltfunktionen sind ein logischer Formalismus zur Beschreibung von Schaltnetzen
  - Die Boolesche Algebra dient zur algebraischen Vereinfachung von Schaltfunktionen
  - Schaltnetze mit weniger Gattern und Inputs sind einfacher und kostengünstiger zu implementieren
  - Es ist von ökonomischen Interesse, minimale Schaltnetze zu bestimmen

- **Probleme bei der algebraischen Minimierung:**
  - es gibt keine klare, methodische Vorgehensweise (Algorithmus), wie welche Regeln in welcher Reihenfolge angewandt werden sollen
  - es ist nicht immer leicht zu bestimmen, wann ein Boolescher Ausdruck minimal ist

- **mögliche Lösung:**
  - Karnaugh-Diagramme
  - Quine/McCluskey - Verfahren (bei mehr als 6 Variablen)

Boolesche (Schalt-) Algebra (20)

Karnaugh-Plan

- ist eine graphische Technik zur Darstellung und Vereinfachung von Booleschen Ausdrücken
- ist eine andere, *zweidimensionale* Darstellung von Wahrheitstabellen, wobei jede Zelle *genau einen Minterm* repräsentiert.

Karnaugh-Pläne mit den jeweiligen Mintermen:

für 2 Variablen:

Y		A 0	1
B	0	$\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{B}\,A$
	1	$B\,\overline{A}$	$B\,A$

für 3 Variablen:

Y		BA 0 0	0 1	1 1	1 0
C	0	$\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{C}\,\overline{B}\,A$	$\overline{C}\,B\,A$	$\overline{C}\,B\,\overline{A}$
	1	$C\,\overline{B}\,\overline{A}$	$C\,\overline{B}\,A$	$C\,B\,A$	$C\,B\,\overline{A}$

Boolesche (Schalt-) Algebra (21)

Karnaugh-Plan

Y	BA 0 0	0 1	1 1	1 0
C 0	$\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{C}\,\overline{B}\,A$	$\overline{C}\,B\,A$	$\overline{C}\,B\,\overline{A}$
1	$C\,\overline{B}\,\overline{A}$	$C\,\overline{B}\,A$	$C\,B\,A$	$C\,B\,\overline{A}$

Hauptidee:

Horizontal und vertikal benachbarte Zellen entsprechen Mintermen, die nur bzgl. *einer* Variablen unterscheiden.

$$Y = \overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A} + C\,\overline{B}\,\overline{A} + \overline{C}\,B\,A + \overline{C}\,B\,\overline{A} + C\,B\,A + C\,B\,\overline{A}$$
$$Y = \overline{B}\,\overline{A} + \overline{C}\,B + C\,B$$
$$Y = \overline{B}\,\overline{A} + B$$

Y	BA 0 0	0 1	1 1	1 0
C 0	1	0	1	1
1	1	0	1	1

Es gilt:
Benachbarte Einsen führen zu Vereinfachungen

Hinweis: eine bessere Vereinfachung wird hier zwecks Erläuterung des Prinzips nicht vorgenommen

Boolesche (Schalt-) Algebra (22)

Fragestellung für das Erstellen eines Karnaugh - Planes:

Welche Minterme (Felder) werden von einem (vereinfachten) Produktterm überdeckt?

Es gelten folgende Regeln:

- Es werden 1-Blöcke mit 1, 2, 4, 8 ... Zellen gebildet (2er-Potenzen)
- Ein Block vereinfacht um so viele Variablen wie der Exponent der 2er-Potenz der Anzahl der überdeckten Zellen, also $ld(n)$
- Blöcke sollten folglich so *groß wie möglich* sein
- Eine Zelle kann zu *mehreren Produkttermen* gehören
- Die Variablenbelegung (Spalten- und Zeilenkopf) darf sich jeweils nur um *exakt eine Variablenbelegung* unterscheiden
- Karnaugh-Pläne repräsentieren geometrisch einen *Torus*:
  → oberste Zeile ist auch benachbart zur untersten Zeile
  → Spalte links außen ist benachbart zur Spalte rechts außen
  → die Regeln bezüglich Variablenbelegung gelten auch bezüglich dieser Zeilen / Spalten

Boolesche (Schalt-) Algebra (23)

Praktische Regeln zur Minimierung mittels Karnaugh-Plan:

1. Aufstellen der Wahrheitstabelle aus den logischen Bedingungen der Aufgabenstellung, sofern nicht bereits vorhanden
2. Zeichnen des Karnaugh-Planes mit entsprechend vielen Zellen (= Zeilenanzahl der Wahrheitstabelle) und Beschriftung der Zeilen / Spalten mit der Variablenbelegung entsprechend Gray-Code
3. Die Variablen werden im Spalten- / Zeilenkopf *links beginnend* und in *genau der Reihenfolge* angegeben, wie sie im Tabellenkopf der Wahrheitstabelle stehen. Die Funktionswerte werden passend in die Zellen eingetragen
4. Bilden von Blöcken mit Zellen-Funktionswert 1 aus 2, 4, 8 oder 16 Zellen, so dass alle Einsen in *mindestens einem Block* sind. Wichtig ist ferner, Blöcke *maximaler Größe* und in *minimaler Anzahl* zu finden, wobei Zellen mehrfach verwendet werden können. Der Rest verbleibt ggf. als 1er-Blöcke.
5. Auslesen der minimierten Terme, indem alle Variablen in einen Produktterm aufgenommen werden, deren Variablenbelegung im jeweiligen Block *konstant* ist. Eine 0 ergibt eine negierte Variable und eine 1 eine nichtnegierte Variable. Verbinden der Produktterme mittels OR zu einer DNF.

Boolesche (Schalt-) Algebra (24)

Beispiel 1:

x_3	x_2	x_1	$f_1(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

f_1		x_2x_1: 0 0	0 1	1 1	1 0
x_3	0	1	1	0	1
	1	1	0	0	1

Karnaugh-Plan aus Wahrheitstabelle

DNF aus Wahrheitstabelle

$$f_1 = \overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_3\overline{x}_2 x_1 + \overline{x}_3 x_2\overline{x}_1 + x_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + x_3 x_2\overline{x}_1$$

Minimiert mittels Karnaugh-Plan

$$f_1 = \overline{x}_1 + \overline{x}_3\overline{x}_2$$

Boolesche (Schalt-) Algebra (25)

Regeln für das Vereinfachen von Booleschen Ausdrücken:

- Überdeckung *aller Einsen* mit *minimaler Anzahl* von Blöcken
- Wahl von Blöcken *maximaler Größe*
- Mehrfache Überdeckung möglich

Beispiel 2:

$$f_2 = \overline{x}_4\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4\overline{x}_3x_2x_1 + \overline{x}_4\overline{x}_3x_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4x_3\overline{x}_2x_1 + \overline{x}_4x_3x_2x_1 + \overline{x}_4x_3x_2\overline{x}_1 + x_4\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + x_4\overline{x}_3x_2\overline{x}_1$$

f_2	x_2x_1: 0 0	0 1	1 1	1 0
x_4x_3: 0 0	1	0	1	1
0 1	0	1	1	1
1 1	0	0	0	0
1 0	1	0	0	1

$$f_2 = \overline{x}_3\overline{x}_1 + \overline{x}_4x_2 + \overline{x}_4x_3x_1$$

Karnaugh-Plan mit Block (Minterm)
Über alle vier Ecken

Beispiel 3:

$$f_3 = \overline{x}_4\overline{x}_3\overline{x}_2x_1 + \overline{x}_4\overline{x}_3x_2x_1 + \overline{x}_4x_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4x_3\overline{x}_2x_1$$
$$+\overline{x}_4x_3x_2x_1 + \overline{x}_4x_3x_2\overline{x}_1 + x_4x_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + x_4x_3\overline{x}_2x_1$$
$$+x_4x_3x_2x_1 + x_4x_3x_2\overline{x}_1$$

$$f_3 = {\color{blue}x_3} + {\color{red}\overline{x}_4x_1}$$

f_3	x_2x_1 0 0	0 1	1 1	1 0
x_4x_3 0 0	0	1	1	0
0 1	1	1	1	1
1 1	1	1	1	1
1 0	0	0	0	0

Karnaugh-Plan mit Block aus 8 Einsen

Boolesche (Schalt-) Algebra (27)

Es gilt: Es kann mehrere minimale Lösungen geben.

Beispiel 4:

$$f_4 = \overline{x}_4\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4 x_3\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4 x_3\overline{x}_2 x_1 + x_4 x_3\overline{x}_2 x_1 + x_4 x_3 x_2 x_1$$

$$f_4 = \overline{x}_4\overline{x}_2\overline{x}_1 + x_3\overline{x}_2 x_1 + x_4 x_3 x_1$$

$$f_4 = \overline{x}_4\overline{x}_2\overline{x}_1 + \overline{x}_4 x_3\overline{x}_2 + x_4 x_3 x_1$$

f_4	x_2x_1: 0 0	0 1	1 1	1 0
x_4x_3: 0 0	1	0	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	1	1	0
1 0	0	0	0	0

f_4	x_2x_1: 0 0	0 1	1 1	1 0
x_4x_3: 0 0	1	0	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	1	1	0
1 0	0	0	0	0

Karnaugh-Pläne mit mehreren gleichwertigen Lösungen

Boolesche (Schalt-) Algebra (28)

Don´t care - Bedingungen d:

- Treten auf, wenn bei Schaltnetzen gewisse Eingangsbelegungen nicht möglich sind
  - entsprechende Ausgangsbelegungen sind egal (don´t care), da sie im Anwendungsszenarium nicht vorkommen
  - Ausgangsbelegung kann 0 oder 1 sein
  - Definition: Ausgangsbelegung $d := 0 + 1$
  - Folglich kann eine implizite Belegung mit 0 oder 1 vorgenommen werden, so dass hierdurch eine einfachere Lösung entsteht

- Die Möglichkeit, einen Ausgang beliebig zu definieren, kann zur Vereinfachung der Schaltfunktion genutzt werden.

Boolesche (Schalt-) Algebra (29)

Beispiel: Klimaanlage

Inputvariable	Bedeutung, wenn 0	Bedeutung, wenn 1
H (heiß)	$< 22°C$	$> 22°C$
K (kalt)	$> 15\,°C$	$< 15°C$
F (feucht)	$< 75\,\%$	$> 75\,\%$
T (trocken)	$> 40\,\%$	$< 40\,\%$

Output	Bedeutung, wenn 0	Bedeutung, wenn 1
P	Kaltlufterzeuger aus	Kaltlufterzeuger an
Q	Warmlufterzeuger aus	Warmlufterzeuger an
R	Entfeuchter aus	Entfeuchter an
S	Befeuchter aus	Befeuchter an

Hinweis: Bei Erhöhung der Temperatur kann die Luft mehr Wasserdampf aufnehmen, was zur Verringerung der relativen Luftfeuchte führt.

Boolesche (Schalt-) Algebra (30)

H	K	F	T	**Bedeutung**	P	Q	R	S
0	0	0	0	OK	0	0	0	0
0	0	0	1	Trocken	0	0	0	1
0	0	1	0	Feucht	0	0	1	0
0	0	1	1	**Unmöglich**	d	d	d	d
0	1	0	0	Kalt	0	1	0	0
0	1	0	1	Kalt/Trocken	0	1	0	1
0	1	1	0	Kalt/Feucht	0	1	0	0
0	1	1	1	**Unmöglich**	d	d	d	d
1	0	0	0	Heiß	1	0	0	0
1	0	0	1	Heiß/Trocken	1	0	0	0
1	0	1	0	Heiß/Feucht	1	0	1	0
1	0	1	1	**Unmöglich**	d	d	d	d
1	1	0	0	**Unmöglich**	d	d	d	d
1	1	0	1	**Unmöglich**	d	d	d	d
1	1	1	0	**Unmöglich**	d	d	d	d
1	1	1	1	**Unmöglich**	d	d	d	d

Boolesche (Schalt-) Algebra (31)

Karnaugh-Diagramm mit don‘t care Bedingungen für den Warmlufterzeuger:

Q		HK 0 0	0 1	1 1	1 0
FT	0 0	0	1	d	0
	0 1	0	1	d	0
	1 1	d	d	d	d
	1 0	0	1	d	0

Verwendung von don‘t-care-Bedingungen, soweit sich dadurch größere oder weniger Blöcke ergeben

- Blöcke werden so gewählt, dass sich eine maximale Überdeckung ergibt
- d‘s können einbezogen werden, wenn vorteilhaft
- Somit größtmögliche Vereinfachung
- Ergebnis: $Q = K$

Boolesche (Schalt-) Algebra (32)

Zusammenfassung:

- Es wurde gezeigt, wie sich kombinatorische Schaltnetze bzw. Schaltungen mit einem bestimmten, gewünschten Verhalten auf der Basis von Gattern in folgenden Schritten realisieren lassen:
  - Das gewünschte Verhalten wird in Form von Wahrheitstabellen beschrieben.
  - Durch Anwendung von algebraischen oder graphischen Methoden wird daraus eine Schaltfunktion abgeleitet.
  - Der resultierende Schaltung wird durch die Verbindung der den Operatoren entsprechenden Gattern mit den zugehörigen Variablen als Eingängen erzeugt.

Boolesche (Schalt-) Algebra (33)

Umsetzung logischer Schaltfunktionen

- Mit fortschreitender Technologie wurde es möglich, die Anzahl der Gatter pro Chip exponentiell zu erhöhen. Je nach erzielter Integrationsdichte unterscheidet man verschiedene Technologien:
  - SSI (< 20 Gatter pro Chip)
  - MSI (> 20 Gatter, komplette Realisierung einer häufig benutzten logischen Funktion wie z.B. Multiplexer)
  - LSI (Realisierung kompletter Systeme, z.B. Mikroprozessoren auf einem Chip)
  - VLSI (Produktion von Speicherchips von enormer Kapazität, moderne Hochleistungsprozessoren)