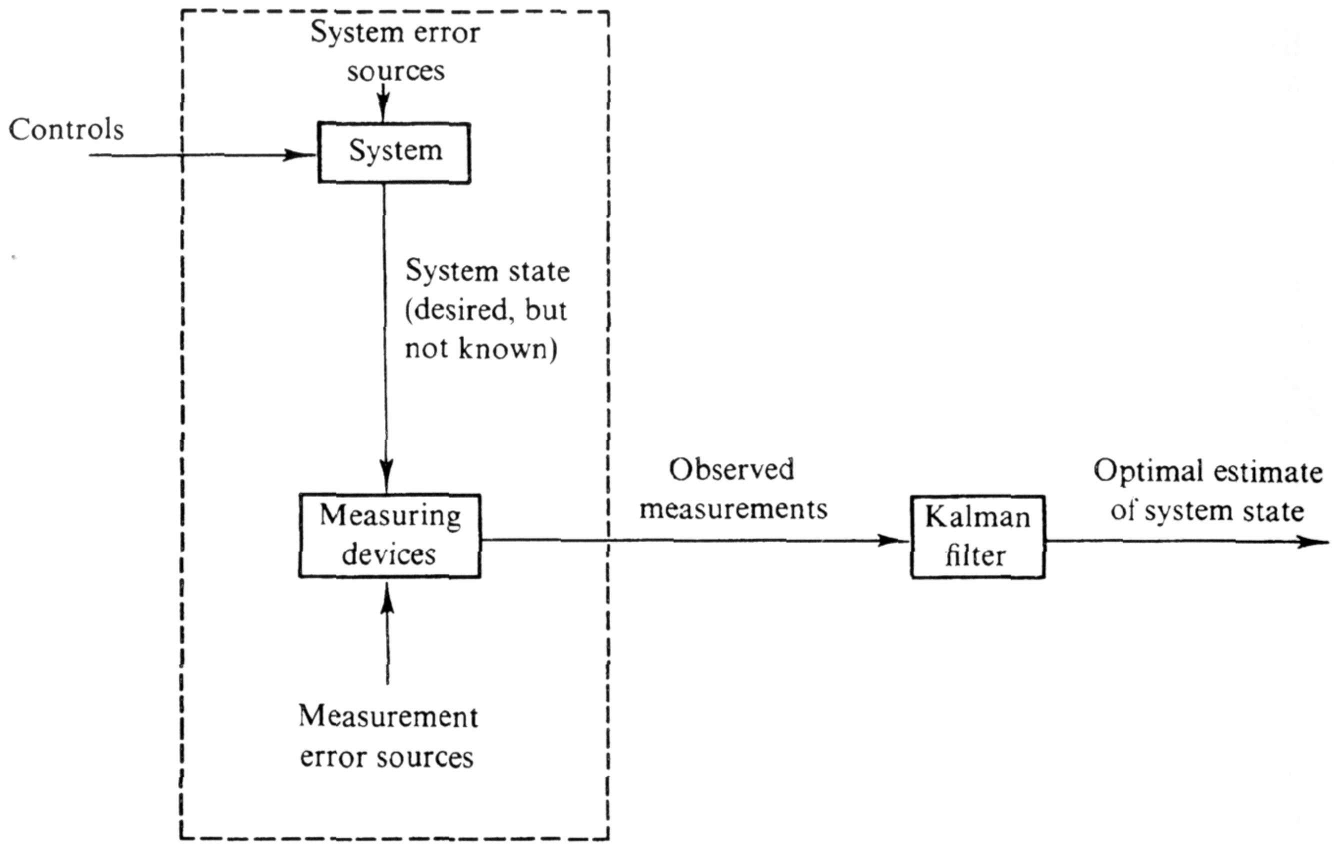
Kalmanfiter (1)

Typische Situation für den Einsatz von Kalman-Filtern



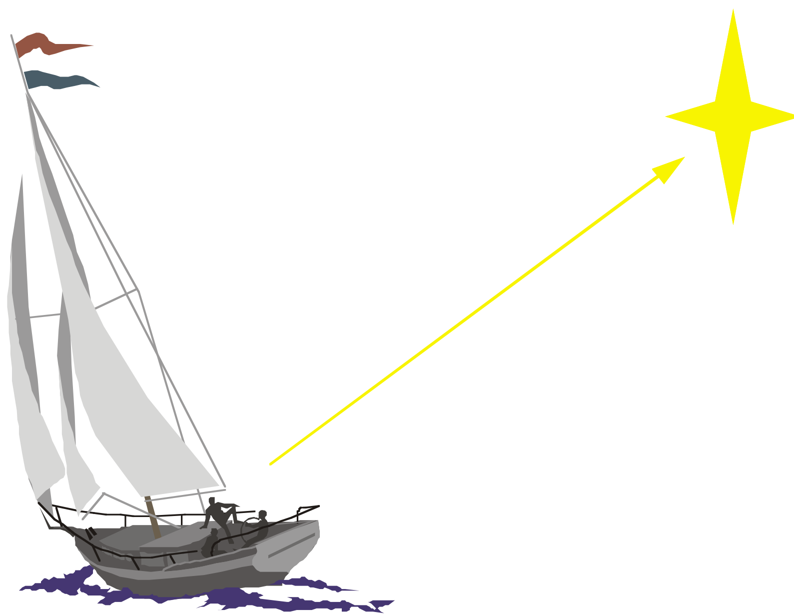
Kalmanfiter (2)

Kalman-Filter:

- optimaler rekursiver Datenverarbeitungsalgorithmus
- „optimal“ hängt vom gewählten Kriterium ab
- Verringerung des Fehlers des Messwertes
- Verarbeitet alle zur Verfügung stehenden Messwerte unabhängig ihrer Genauigkeit, zur Schätzung des aktuellen Wertes der Variablen unter Nutzung
  - Von Informationen über das System
  - Der statistischen Beschreibung des Systemrauschens
  - Der verfügbaren Informationen über Anfangswerte der Variablen
- Rekursiv: alte Werte der Variablen werden nicht gespeichert

Kalmanfiter (3)

Positionsbestimmung



- Positionsbestimmung durch Orientierung an einem Stern
- ein Ergebnis mit größerer Varianz
- Weiteres Ergebnis mit kleiner Varianz
- Frage: wie können diese zusammengeführt werden?

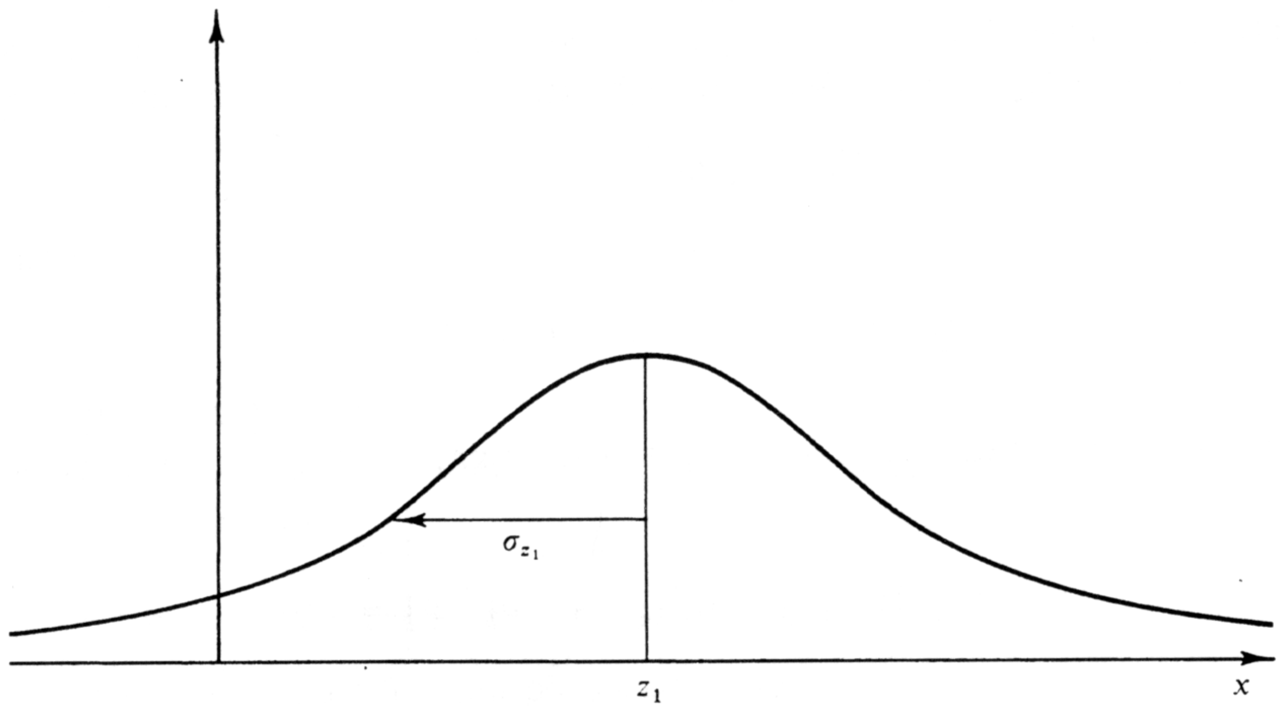
Kalmanfiter (4)

1. Messung

- Messung zum Zeitpunkt t_1, Position z_1
- Messung ist nicht so genau
  - Standardabweichung σ_{z1} (beschreibt die Unsicherheit der Messung
- Varianz σ_{Z1}^2
- Bedingte Wahrscheinlichkeit $x(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1, bedingt durch die Messung z_1
- basierend auf der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte, die beste Schätzung der Position ist: $\hat{x}(t_1) = z_1$
  - Varianz des Fehlers: $\sigma_x^2(t_1) = \sigma_{z1}^2$
  - $\hat{x}$ ist der Punkt mit der größten Wahrscheinlichkeit und die Mitte der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kalmanfiter (5)

Statistische Größen



Gaußsche Normalverteilung

Varianz
Erwartungswert

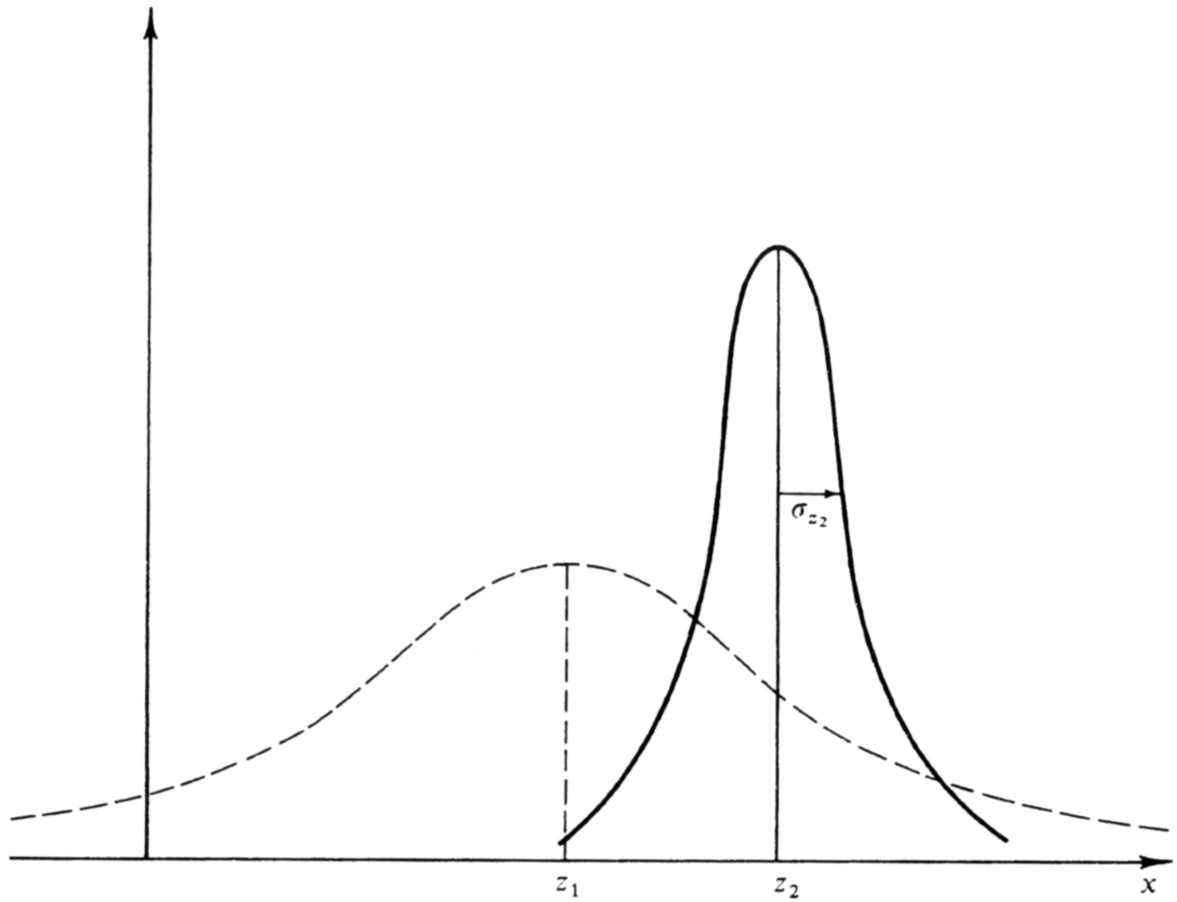
Kalmanfiter (6)

2. Messung

- 2. Messung z_2 zum Zeitpunkt $t_2 \cong t_1$
- Angenommen, diese Messung sei genauer → Varianz wird kleiner, Peak der Kurve größer
- → Messung ist sicherer

- Ergebnis: 2 Messungen sind verfügbar
- Frage: wie können diese Messungen zusammengeführt werden?

Kalmanfiter (7)



- verschiedene Messgrößen können unterschiedliche Erwartungswerte und Varianzen besitzen

Kalmanfiter (8)

Gemeinsame Wahrscheinlichkeit:

- Gaußsche Dichteverteilung mit Hauptwert μ

$$\mu = \frac{\sigma_{Z2}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2} \cdot z_1 + \frac{\sigma_{Z1}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2} \cdot z_2$$

- und Varianz σ^2

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_{Z1}^2} + \frac{1}{\sigma_{Z2}^2}$$

- bei dieser Dichte ist die beste Schätzung gleich dem Hauptwert:

$$\hat{x}(t_2) = \mu$$

Kalmanfiter (9)

- Die Gleichung für $\hat{x}(t_2)$ kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mu = \frac{\sigma_{Z2}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2} \cdot z_1 + \frac{\sigma_{Z1}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2} \cdot z_2$$

$$= z_1 + \frac{\sigma_{Z2}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2} \cdot (z_2 - z_1)$$

- Weiteres Umformen mit $\hat{x}(t_1) = z_1$

$$\hat{x}(t_2) = z_1 + K(t_2) \cdot (z_2 - \hat{x}(t_1)) \quad \text{mit} \quad K(t_2) = \frac{\sigma_{Z1}^2}{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2}$$

- Dabei ist $\hat{x}(t_1)$ - Prediktor

  $K(t_2)$ - Korrektor

Kalmanfiter (10)

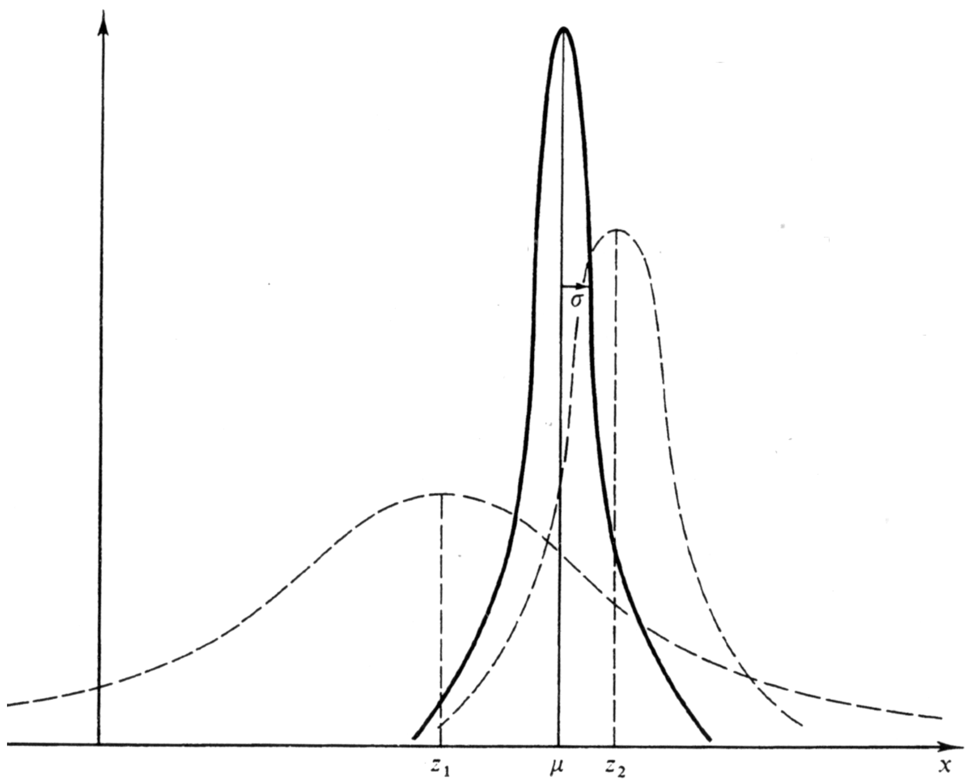
- Unter Nutzung des Korrektors $K(t_2)$ kann die Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma_x^2(t_1) - K(t_2)\sigma_x^2(t_1)$$

- $\hat{x}(t_2)$ und $\sigma_x^2(t_2)$ enthalten alle notwendigen aktuellen Informationen
- mit diesen beiden Variablen ist die Position zur gegebenen Zeit t_2 mit den Messungen z_1 und z_1 vollständig beschrieben.

- Ergebnis: Lösung des statischen Schätzproblems

Kalmanfiter (11)



- Zusammenfassung der beiden Messgrößen führt zu einem Neuen Erwartungswert und einer geringeren Varianz

Kalmanfiter (12)

Dynamisches Schätzproblem

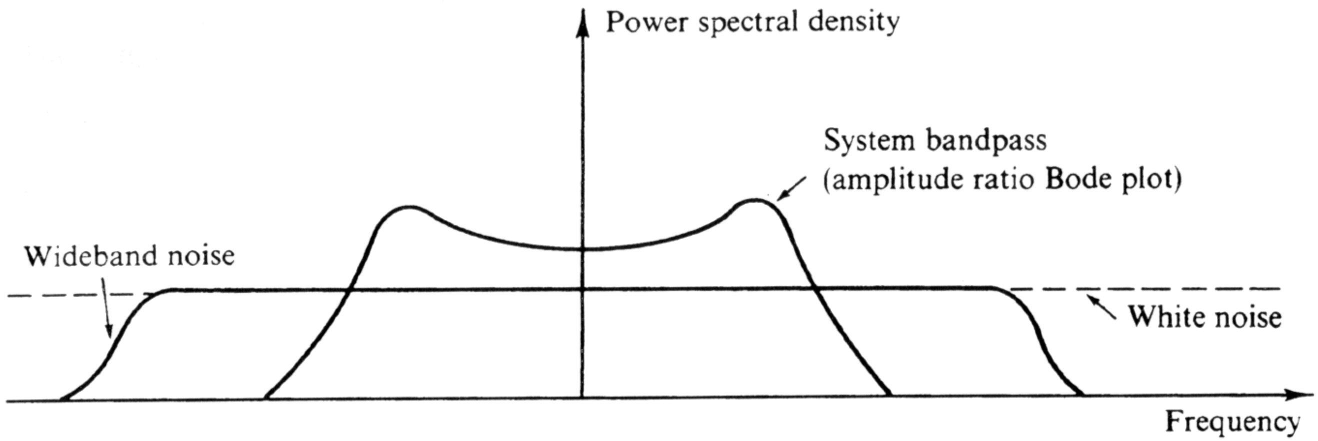
- Bewegung zu einer neuen Position, bei der eine neue Messung erfolgt
- Modell der Bewegung

$$\frac{dx}{dt} = u + w$$

- dabei ist u der Weg und w ein Rauschen, das die Unsicherheit repräsentiert.
- Das Rauschen w wird als weißes gaußsches Rauschen mit Mittelwert 0 und Varianz σ_w^2 modelliert

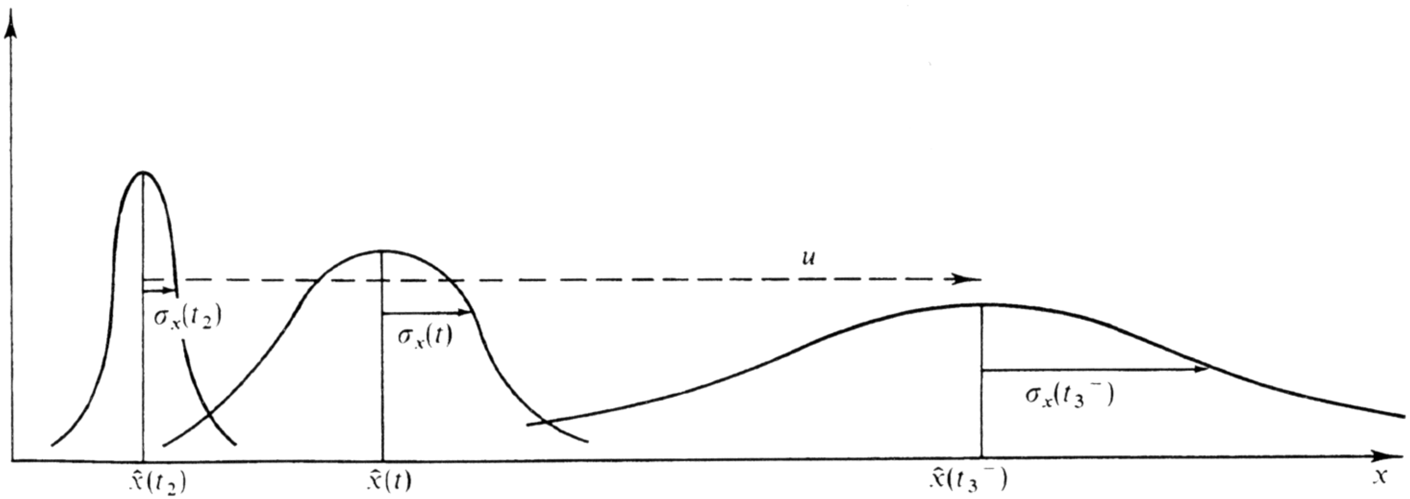
Kalmanfiter (13)

Weißes Rauschen, farbiges Rauschen



- weißes Rauschen enthält alle Frequenzen
- Ist zeitlich nicht korreliert, d.h. aufeinanderfolgende Werte besitzen keinen statistischen Zusammenhang
- weißes Rauschen ist Hilfskonstrukt, deshalb real nur breitbandiges Rauschen
- Breitbandiges Rauschen wirkt aufgrund des Systembandpasses wie weißes Rauschen
- Weißes Rauschen kann mit einem Formfilter erzeugt werden

Kalmanfiter (14)



Für den dynamischen Fall wird ein aktueller Wert geschätzt, der dann mit der aktuellen Messung verrechnet wird

Kalmanfiter (15)

- Zum Zeitpunkt t_3^- , der unmittelbar vor dem neuen Messzeitpunkt t_3 liegt, kann die Verteilung mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\hat{x}\left(t_3^-\right) = \hat{x}\left(t_2\right) + u\left(t_3 - t_2\right)$$

$$\sigma_x^2\left(t_3^-\right) = \sigma_x^2\left(t_2\right) + \sigma_w^2\left(t_3 - t_2\right)$$

- $\hat{x}\left(t_3^-\right)$ ist die optimale Prediktion der Position x zum Zeitpunkt t_3^- , bevor die neue Messung durchgeführt wird, und $\sigma_x^2\left(t_3^-\right)$ die Varianz

Kalmanfiter (16)

3. Messung

- Messwert z_3, Varianz σ_{Z3}^2
- Wie vorher, haben wir 2 gaußsche Dichteverteilungen, die die Position beschreiben: eine unmittelbar vor der Messung, basierend auf den alten Messungen, und eine durch die neue Messung

- Schätzung $\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + K(t_3) \cdot \left(z_3 - \hat{x}(t_3^-)\right)$

- Varianz $\sigma_x^2(t_3) = \sigma_x^2(t_3^-) - K(t_2)\sigma_x^2(t_3^-)$

- Mit dem Prediktor $K(t_3) = \dfrac{\sigma_x^2(t_3^-)}{\sigma_x^2(t_3^-) + \sigma_{Z3}^2}$

Kalmanfiter (17)

Kalman-Filter im Zustandsraum

Time Update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Measurement Update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Initial estimates for $\hat{x}_{k-1}$ and P_{k-1}