Transformationen (1)

Darstellung von Informationen und Modellen

- Position von Objekten in der Umwelt
- Beschreibung der eigenen Position
- Umweltmodell, Weltmodell

- Position und Orientierung von Sensoren
- räumlicher Bezug von Sensorinformationen
- gleiche Darstellungsbasis von Sensorinformationen

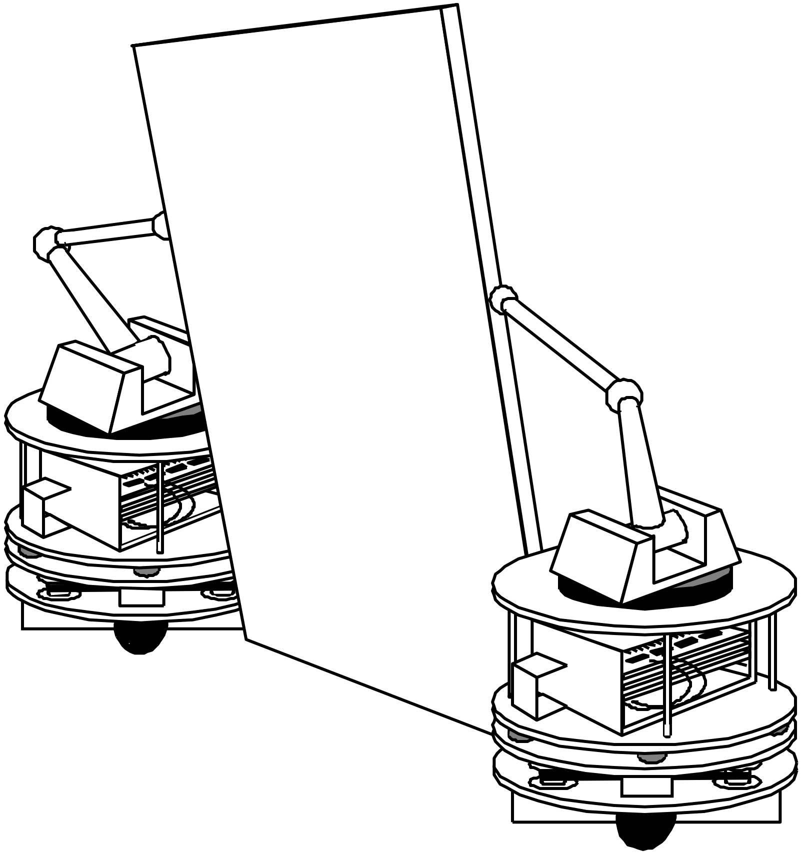
- Modellierung der eigenen geometrischen Eigenschaften
- Beschreibung der eigenen Bewegungen
- Ableitung von Einzelbewegungen von Aktoren

- Austausch von koordinatenbasierten Informationen nur bei Darstellung im gleichen Koordinatensystem aller Partner möglich

Transformationen (2)

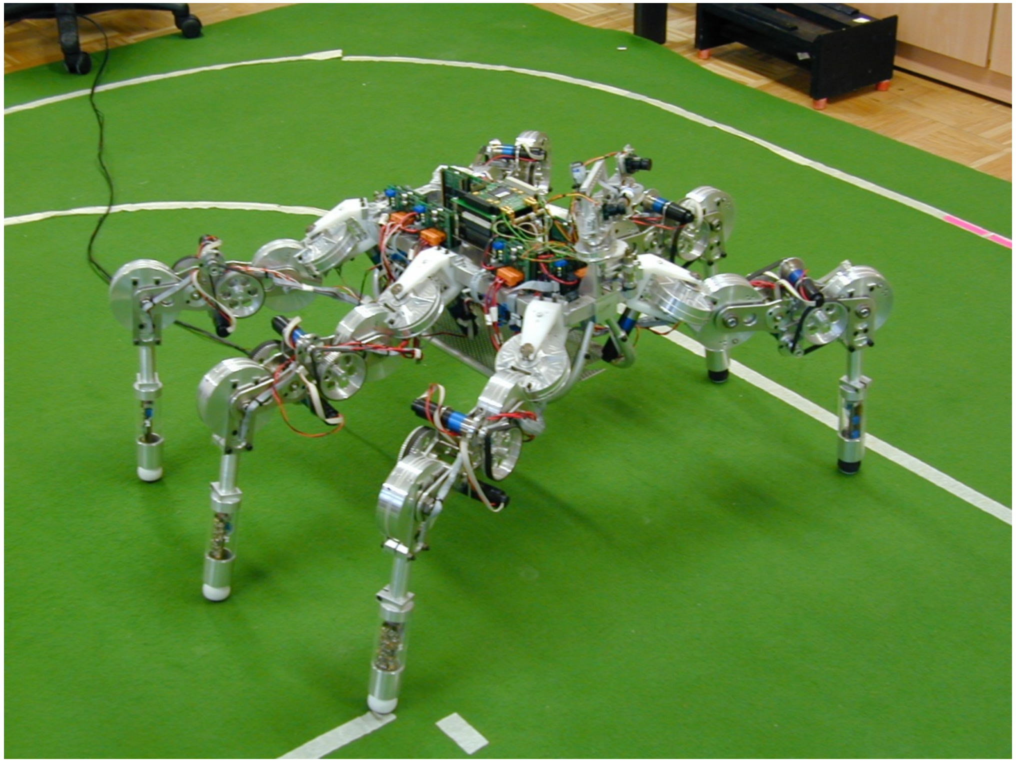
Beispiel: mehrere Roboter tragen ein Objekt

- Position der Roboter
- Konfiguration der Manipulatoren
- Gemeinsame Bewegung der Greifer und des Objektes



Transformationen (3)

Beispiel: kooperierende Teilsysteme eines Roboters



Transformationen (4)

Verwendung von Koordinatensystemen

- Definition von Koordinatensystemen
- Beschreibung der Beziehungen der Koordinatensysteme zueinander
- Überführung von Informationen aus einem Koordinatensystem in ein anderes
  - Transformationen
- bei mechanisch gekoppelten Teilsystemen:
  - Kinematik

- Beispiel: Überführung von lokalen Sensorinformationen
  in eine Darstellung innerhalb eines Weltmodells

Transformationen (5)

Koordinatensysteme, allgemein

- kartesische Koordinatensysteme
  - orthonormiert, d.h. Achsen stehen senkrecht aufeinander, Achseneinheiten sind normiert

- Verwendung rechtsdrehender Koordinatensysteme
  - „Rechte-Hand-Regel

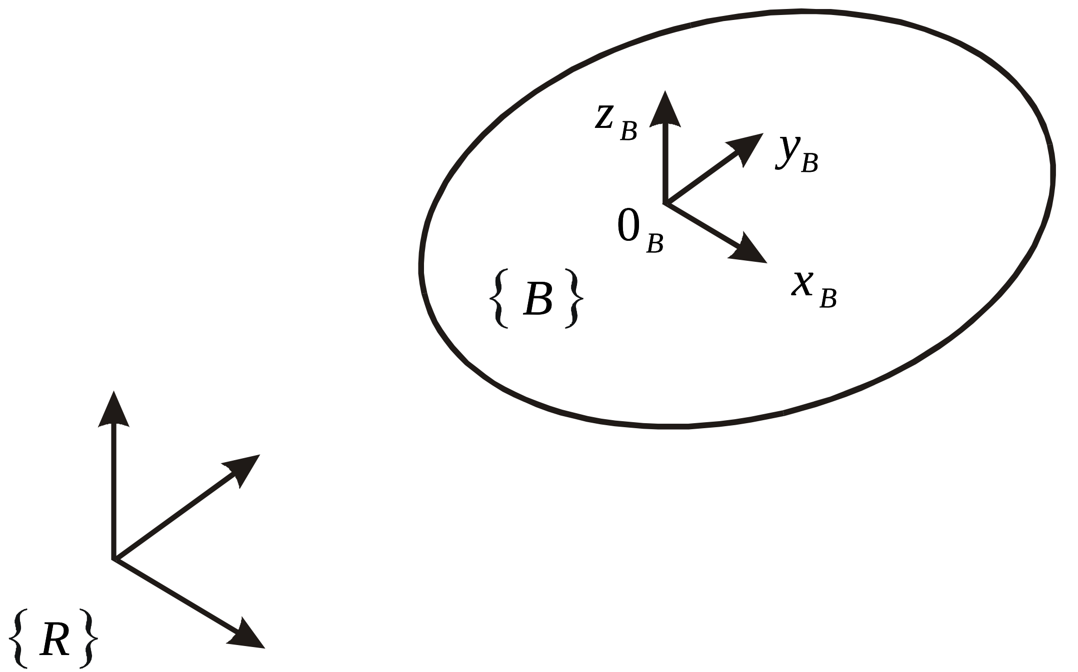
Koordinatensysteme bei Robotern

- Körperkoordinatensystem (allgemein)
  - Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem betreffenden Körper fest verbunden ist, z.B. dem Roboterkörper

- Bezugskoordinatensystem
  - fixiertes Koordinatensystem, das zur Beschreibung der Bewegung von körperfesten Koordinatensystemen dient

Transformationen (6)

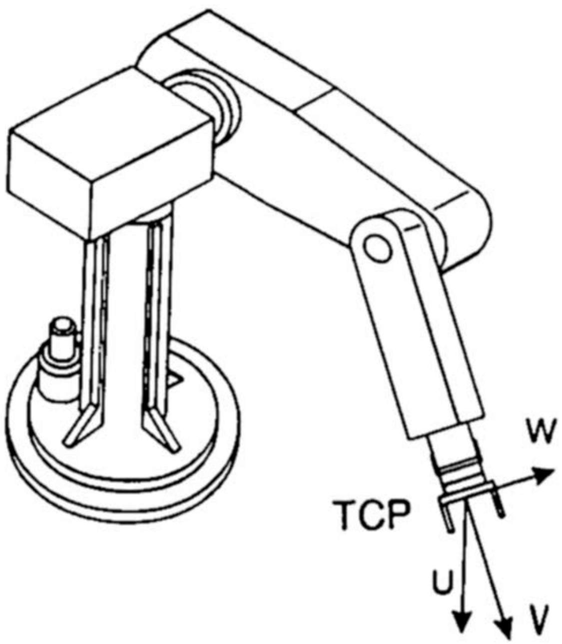
Koordinatensysteme



Körperkoordinatensystem und Bezugskoordinatensystem

Transformationen (7)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter

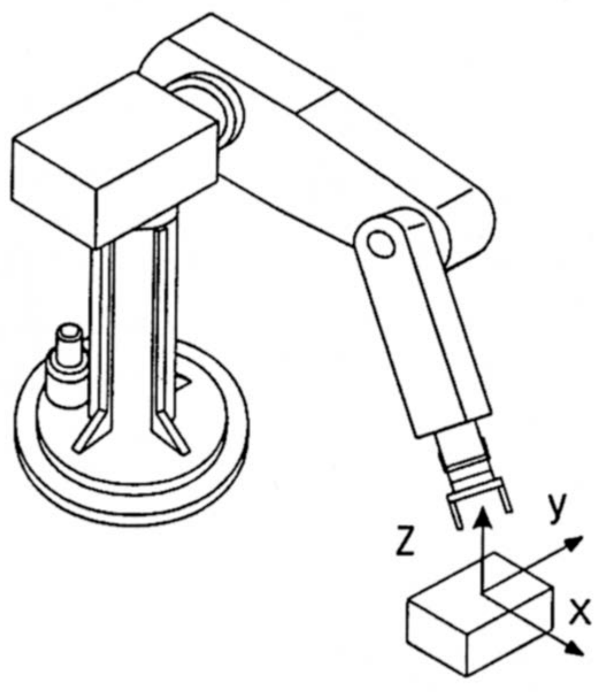


Effektor- und Sensorkoordinatensysteme

- Beschreibung von Sensorinformationen mit räumlichen Bezug auf den Sensor
- Beschreibung von Position und Orientierung von Objekten mit Bezug auf den Effektor

Transformationen (8)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter

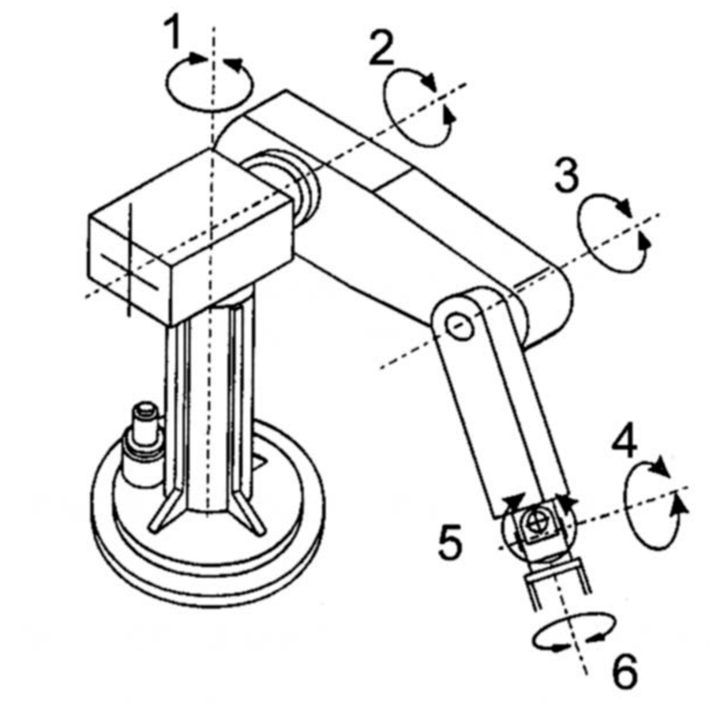


Bezug auf externe Objekte

- Beschreibung von Objekten in der Umwelt des Roboters in ihren Koordinatensystemen

Transformationen (9)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter



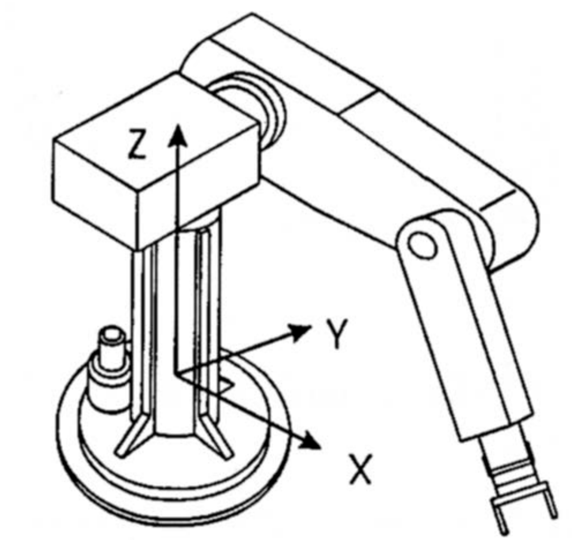
Bezug auf Drehachsen

Koordinatensysteme von Teileinheiten / Teilsystemen

- z.B. Manipulatorkoordinatensystem, Beinkoordinatensystem
- Bezugskoordinatensystem für die jeweiligen Teilsysteme

Transformationen (10)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter

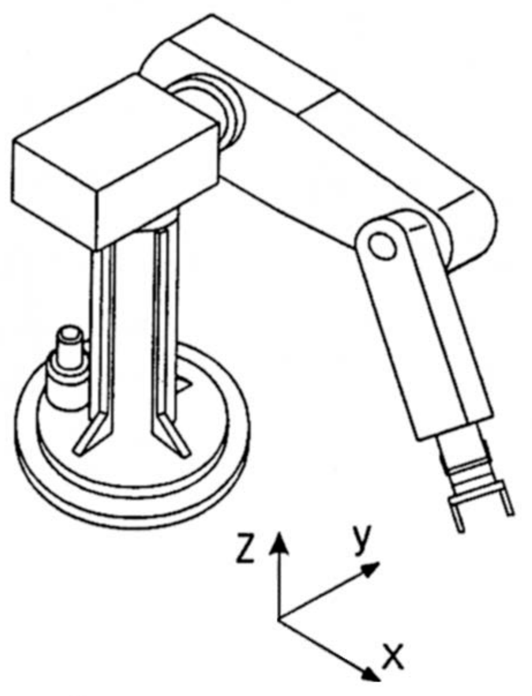


Roboterkoordinatensystem

- Körperkoordinatensystem
- verbunden mit einem festen Punkt der Haupteinheit des Roboters

Transformationen (11)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter



Weltkoordinatensystem

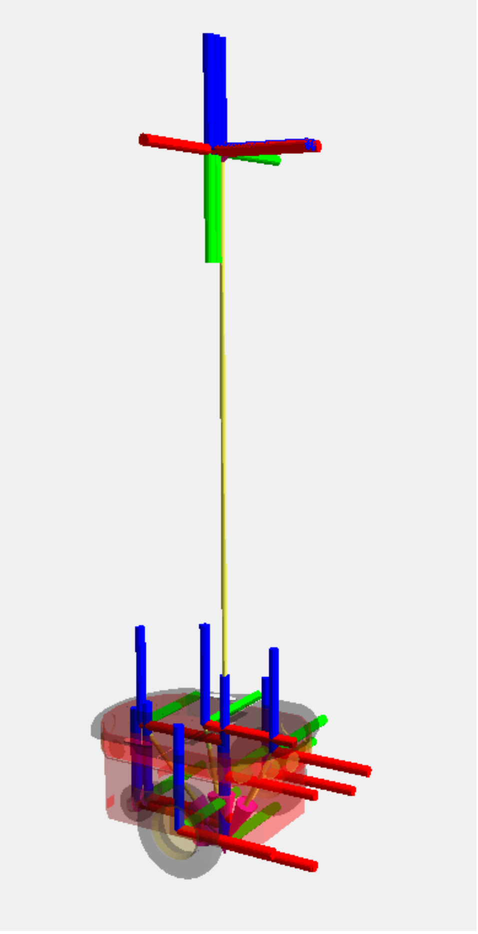
- erdfestes Koordinatensystem {O,X,Y.Z}
  - Z-Achse ist antiparallel zum Gravitationsvektor

$$^{0}\vec{Z} \uparrow\downarrow \vec{g}$$

- Nutzung als Referenzkoordinatensystem

Transformationen (11)

Beispiele für Koordinatensysteme am Roboter



Kootdinatensysteme
am mobilen Roboter

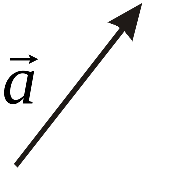
- Roboterkoordinatensystem
- Koordinatensysteme der Antriebe
- Sensorkoordinatensysteme

Transformationen (12)

Vektoren

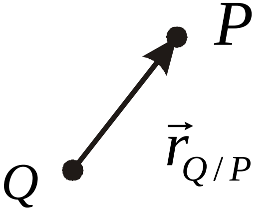
Freier Vektor

- Besitzt eine charakteristische Richtung
- Kann im Raum parallel verschoben werden



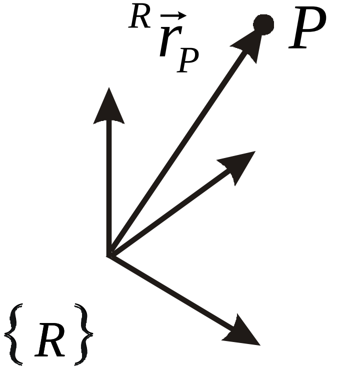
Gebundener Vektor

- Hat einen festen Anfangs- und Endpunkt



Ortsvektor

- Gebundener Vektor, dessen Ursprung im Bezugskoordinatensystem liegt



Transformationen (13)

Vektoren

Allgemeine Darstellung: $\vec{a} = \left(a_1\ a_2\ a_3\right)^{\mathrm{T}}$

Homogener Vektor

- Verwendung einer zusätzlichen Koordinate

$$\vec{a} = \left(a_1\ a_2\ a_3\ r\right)^{\mathrm{T}}$$

- r - Skalierungsfaktor
- hier: Skalierung r = 1

$$\vec{a} = \left(a_1\ a_2\ a_3\ 1\right)^{\mathrm{T}}$$

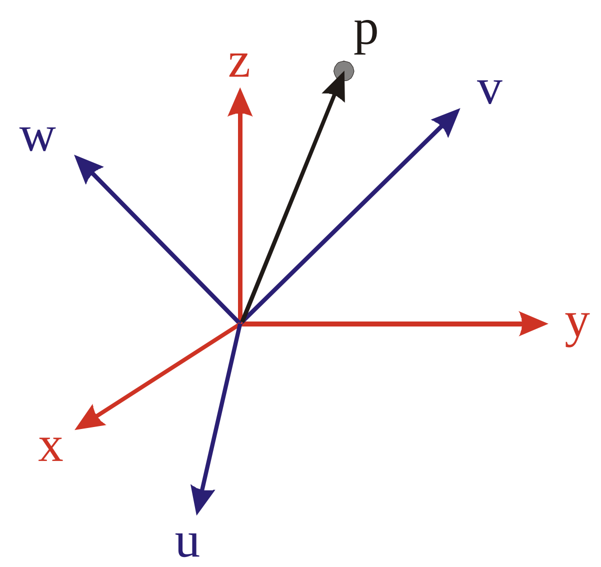
Drehung von Koordinatensystemen

- Koordinatensysteme {*O*;*x*,*y*,*z*}, {*O*;*u*,*v*,*w*}
- Gleicher Ursprung, gegeneinander verdreht
- Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ bzw. $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$
- Darstellung eines Punktes
  – in {*O*;*x*,*y*,*z*}: $\vec{P} = p_x \cdot \vec{e}_x + p_y \cdot \vec{e}_y + p_z \cdot \vec{e}_z$
  – in {*O*;*u*,*v*,*w*}: $\vec{P} = p_u \cdot \vec{e}_u + p_v \cdot \vec{e}_v + p_w \cdot \vec{e}_w$
- für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\left(\angle\, \vec{a}, \vec{b}\right)$$

- Entsprechend gilt

$$\vec{e}_x \cdot \vec{P} = p_x \qquad \vec{e}_u \cdot \vec{P} = p_u$$
$$\vec{e}_y \cdot \vec{P} = p_y \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_v \cdot \vec{P} = p_v$$
$$\vec{e}_z \cdot \vec{P} = p_z \qquad \vec{e}_w \cdot \vec{P} = p_w$$



Transformationen (15)

Drehung von Koordinatensystemen

- Darstellung von p im Koordinatensystem {O;x,y,z}

Vektorxschreibweise

$$p_x = \vec{e}_x \cdot \vec{P} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_u \cdot p_u + \vec{e}_x \cdot \vec{e}_v \cdot p_v + \vec{e}_x \cdot \vec{e}_w \cdot p_w$$

$$p_y = \vec{e}_y \cdot \vec{P} = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_u \cdot p_u + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_v \cdot p_v + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_w \cdot p_w$$

$$p_z = \vec{e}_z \cdot \vec{P} = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_u \cdot p_u + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_v \cdot p_v + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_w \cdot p_w$$

$$p_{xyz} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

- Darstellung von p im Koordinatensystem {O;u,v,w}

Vektorschreibweise

$$p_u = \vec{e}_u \cdot \vec{P} = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_x \cdot p_x + \vec{e}_u \cdot \vec{e}_y \cdot p_y + \vec{e}_u \cdot \vec{e}_z \cdot p_z$$

$$p_v = \vec{e}_v \cdot \vec{P} = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_x \cdot p_x + \vec{e}_v \cdot \vec{e}_y \cdot p_y + \vec{e}_v \cdot \vec{e}_z \cdot p_z$$

$$p_w = \vec{e}_w \cdot \vec{P} = \vec{e}_w \cdot \vec{e}_x \cdot p_x + \vec{e}_w \cdot \vec{e}_y \cdot p_y + \vec{e}_w \cdot \vec{e}_z \cdot p_z$$

$$p_{uvw} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix}$$

Transformationen (16)

Drehung von Koordinatensystemen

- Die rechten Seiten der Gleichungen können als Rotationsmatrix zusammengefasst werden

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_u & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_v & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_w \\ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_u & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_v & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_w \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_u & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_v & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_w \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{e}_u \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_u \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_u \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_v \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_v \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_v \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_w \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_w \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_w \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

- Da R^{-1} gleichzeitig Transponierte von R ist, gilt

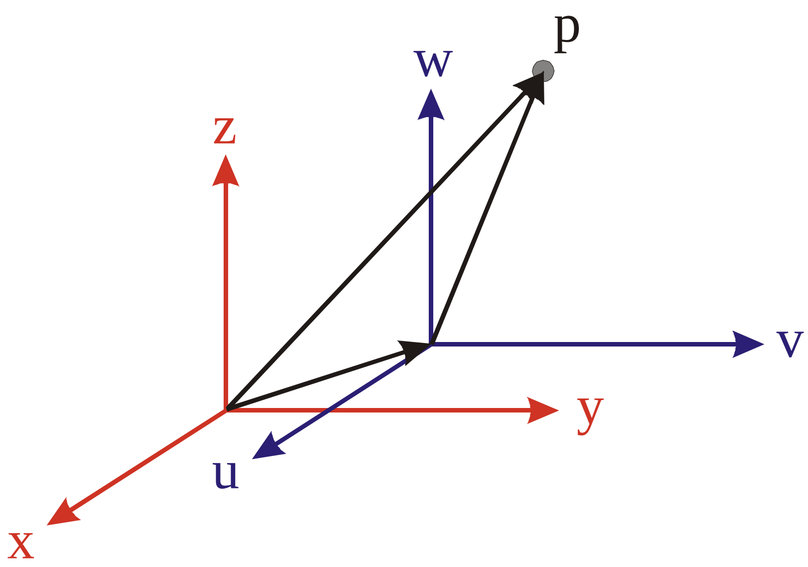
$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

- für die Rotationsbeziehungen gilt also

$$p_{xyz} = \mathbf{R} \cdot p_{uvw} \qquad p_{uvw} = \mathbf{R}^T \cdot p_{xyz} = \mathbf{R}^{-1} \cdot p_{xyz}$$

Transformationen (17)

Verschiebung von Koordinatensystemen



- Verschiebung kann durch eine einfache Vektoraddition ausgedrückt werden

$$p_{xyz} = \mathbf{T} + p_{uvw} \qquad \text{mit} \qquad \{O; x, y, z\} \parallel \{O; u, v, w\}$$

Transformationen (18)

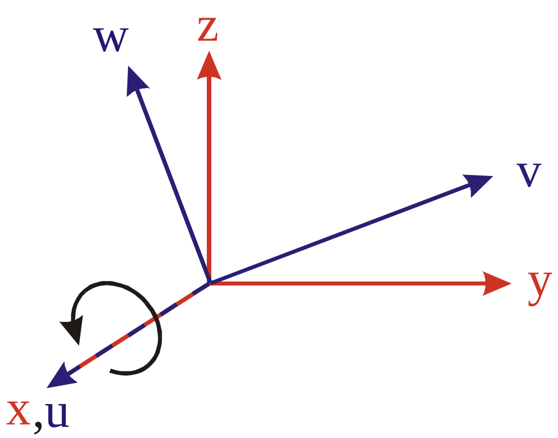
Drehung um die X-Achse mit dem Winkel α

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_u = 1 \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_v = 0 \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_w = 0$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_u = 0 \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_v = \cos(\alpha) \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_w = -\sin(\alpha)$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_u = 0 \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_v = \sin(\alpha) \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_w = \cos(\alpha)$$

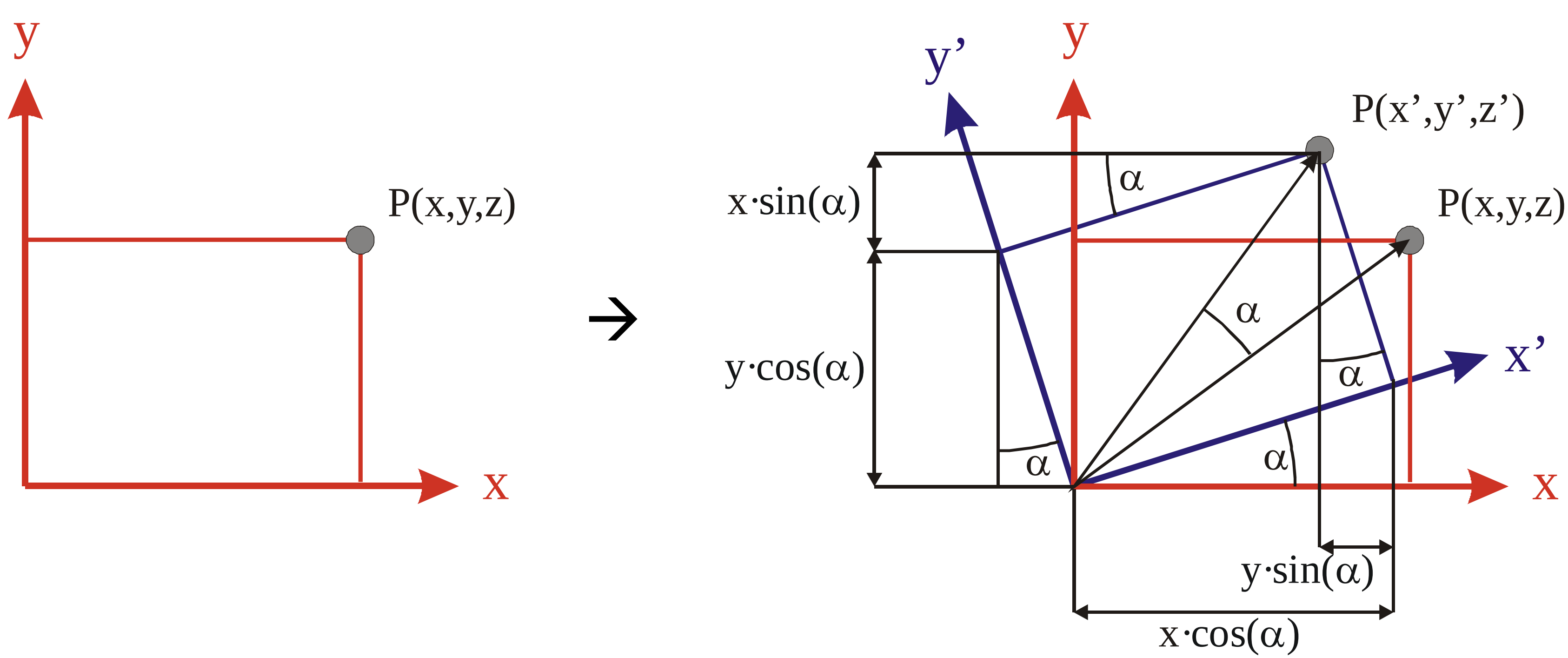
$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



Transformationen (19)

Geometrische Betrachtung der Rotation

- Rotation des Punktes P um die Z-Achse des Koordinatensystems {O;x,y,z}
- geometrische Betrachtung des zugrunde liegenden Koordinatensystems der xy-Ebene



Transformationen (20)

Geometrische Betrachtung der Rotation

- Bei Drehung um Z-Achse um Winkel α gilt:
  - Punkt P mit den Koordinaten $(x,y,z)^T$ geht über in den Punkt P‘ mit den Koordinaten $(x‘,y‘,z‘)^T$:

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$
$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$
$$z' = z$$

  - z-Koordinate bleibt fest, da z die Drehachse ist

- Matrixform

$$p_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{z,\alpha} \cdot p_{xyz}$$

Transformationen (21)

- **Drehung um die Z-Achse mit dem Winkel α**
  - Rotationsmatrix: $$\mathbf{R}_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Drehung um die y-Achse mit dem Winkel α**
  - Rotationsmatrix: $$\mathbf{R}_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Transformationen (22)

Verkettung von Rotationen

- Rotationen lassen sich verketten
- Multiplikation der Rotationsmatrizen von links in der Reihenfolge der Ausführung der Rotationen

$$R = R_n \cdot R_{n-1} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1$$

- Achtung: Matrixmultiplikationen sind nicht kommutativ
- Reihenfolge der Multiplikation (Assoziativität)
  - Vormultiplikation: $R = \left(R_n \cdot \left(R_{n-1} \cdot \ldots \cdot \left(R_2 \cdot R_1\right)\right)\right)$
  - Interpretation: Drehung des momentanen Koordinatensystems um feste Achsen des Ursprungskoordinatensystems
  - Nachmultiplikation: $R = \left(\left(\left(R_n \cdot R_{n-1}\right) \cdot \ldots \cdot R_2\right) \cdot R_1\right)$
  - Interpretation: Drehung um Achsen des momentanen Koordinatensystems

Transformationen (23)

Drehachsen in der Robotik

In der Robotik gibt es zwei mögliche Arten zur Festlegung der Rotationsachsen und der Reihenfolge der Rotationen:

a) Euler-Winkel

b) Roll, Pitch, Yaw

Transformationen (24)

Euler-Winkel

- Drehung α um z-Achse des BKS $\mathbf{R}_{z,\alpha}$
- Drehung β um die neue y-Axhse x‘ $\mathbf{R}_{x',\beta}$
- Drehung γ um die neue z-Achse z“ $\mathbf{R}_{z'',\gamma}$

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_{z,\alpha} \cdot \mathbf{R}_{x',\beta} \cdot \mathbf{R}_{z'',\gamma}$$

$$\mathbf{R}_{S,\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}\alpha\mathrm{C}\gamma - \mathrm{C}\beta\mathrm{S}\gamma\mathrm{S}\alpha & -\mathrm{C}\alpha\mathrm{C}\gamma - \mathrm{C}\beta\mathrm{C}\gamma\mathrm{S}\alpha & \mathrm{S}\alpha\mathrm{S}\beta \\ \mathrm{S}\alpha\mathrm{C}\gamma + \mathrm{C}\beta\mathrm{S}\gamma\mathrm{C}\alpha & \mathrm{C}\beta\mathrm{C}\gamma - \mathrm{S}\alpha\mathrm{S}\gamma & -\mathrm{C}\alpha\mathrm{S}\beta \\ \mathrm{S}\gamma\mathrm{S}\beta & \mathrm{C}\gamma\mathrm{S}\beta & \mathrm{C}\beta \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{S}\varphi = \sin(\varphi)$ und $\mathrm{C}\varphi = \cos(\varphi)$

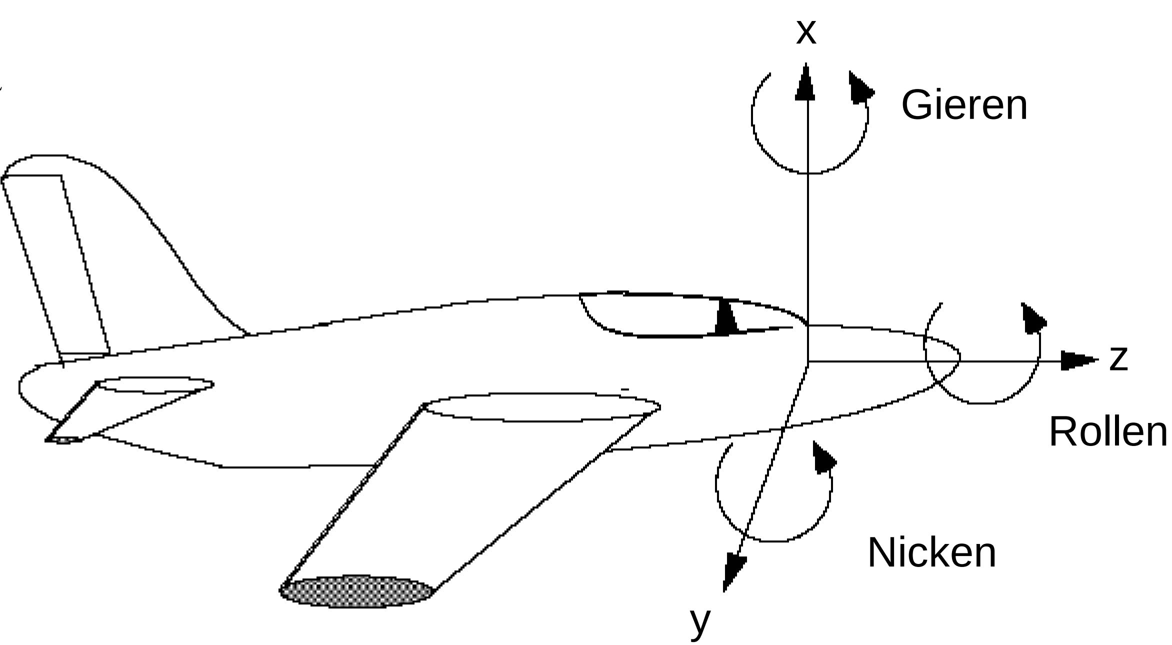
- wichtig:
  - Drehung um veränderte Achsen
  - Aufschreiben von links nach rechts

Transformationen (25)

Roll-Pitch-Yaw (Rollen-Nicken-Gieren)

- Drehung α (Scherwinkel) um die x-Achse des BKS (gieren, schwenken, scheren – engl.: yaw) $\mathbf{R}_{z,\gamma}$
- Drehung β (Neigungswinkel) um die y-Achse des BKS (stampfen, neigen, nicken – engl.: pitch) $\mathbf{R}_{y,\beta}$
- Drehung γ (Rollwinkel) um die z-Achse des BKS (rollen, schlingern – engl.: roll) $\mathbf{R}_{x,\alpha}$

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_{z,\gamma} \cdot \mathbf{R}_{y,\beta} \cdot \mathbf{R}_{x,\alpha}$$



Transformationen (26)

Roll-Pitch-Yaw (Rollen-Nicken-Gieren)

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_{z,\gamma} \cdot \mathbf{R}_{y,\beta} \cdot \mathbf{R}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{R}_S = \begin{pmatrix} C\alpha C\beta & C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma & C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma \\ S\alpha C\beta & S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma \\ -S\beta & C\beta S\gamma & C\beta C\gamma \end{pmatrix}$$

- wichtig:
  - Drehung um unveränderte Achsen
  - Aufschreiben von rechts nach links

Transformationen (27)

Darstellung der Orientierung

- Roll-Pitch-Yaw
  - xyz-System verwendet in Luft- und Raumfahrt

- Euler-Winkel
  - zx‘z‘‘-System in der Mathematik, übliche Definition
  - zy‘x‘‘-System für Programmierung numerisch gesteuerter Handhabungseinrichtungen, IRDATA (Handgelenk TRR)
  - zy‘z‘‘-System verwendet bei der Programmiersprache VAL, eingesetzt beim PUMA-Roboter

Transformationen (28)

Verkettung von Rotationen und Translationen

- Problem:
  - Rotation: Multiplikation mit Rotationsmatrix
  - Translation: Addition des Translationsvektors
  - Verkettung Translationen/Rotationen: sehr komplizierte Ausdrücke
- gesucht:
  - einfache Möglichkeit zur Verkettung der Operationen
- Lösung
  - Nutzung von homogenen Matrizen und Vektoren

Transformationen (29)

Homogene Transformationen

Ergänzung der Transformationsmatrix um eine weitere Dimension

$$D = \left(\begin{array}{c|c} R & T \\ \hline P & S \end{array} \right)$$

R – 3 x 3 Rotation

T – 3 x 1 Translation

P – 1 x 3 Perspektivtransformation

S – 1 x 1 Skalierungsfaktor

Hier:
- Skalierung 1 wichtig
- keine Perspektivtransformation

Transformationen (30)

Homogene Transformationen

- Translation

$$\mathrm{Trans}\left(a,b,c\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation

  um die X-Achse

$$\mathrm{Rot}\left(X,\alpha\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationen (31)

Homogene Transformationen

- Rotation

  um die Y-Achse

$$\mathrm{Rot}\,(Y,\beta)=\begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  um die Z-Achse

$$\mathrm{Rot}\,(Z,\gamma)=\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogene Transformationen

- Mehrere Transformationsschritte lassen sich durch Multiplikation mehrerer Transformationsoperatoren verketten

$$ {}^{C}_{A}\mathrm{T} = {}^{C}_{B}\mathrm{T} \cdot {}^{B}_{A}\mathrm{T} = \mathrm{Rot}(Z, y) \cdot \mathrm{Trans}(a, b, c) $$

- Der Ortsvektor eines Koordinatensystems lässt sich in einem anderen Koordinatensystem ausdrücken, wenn eine Transformationsmatrix ${}^{B}_{A}\mathrm{T}$ existiert, so dass

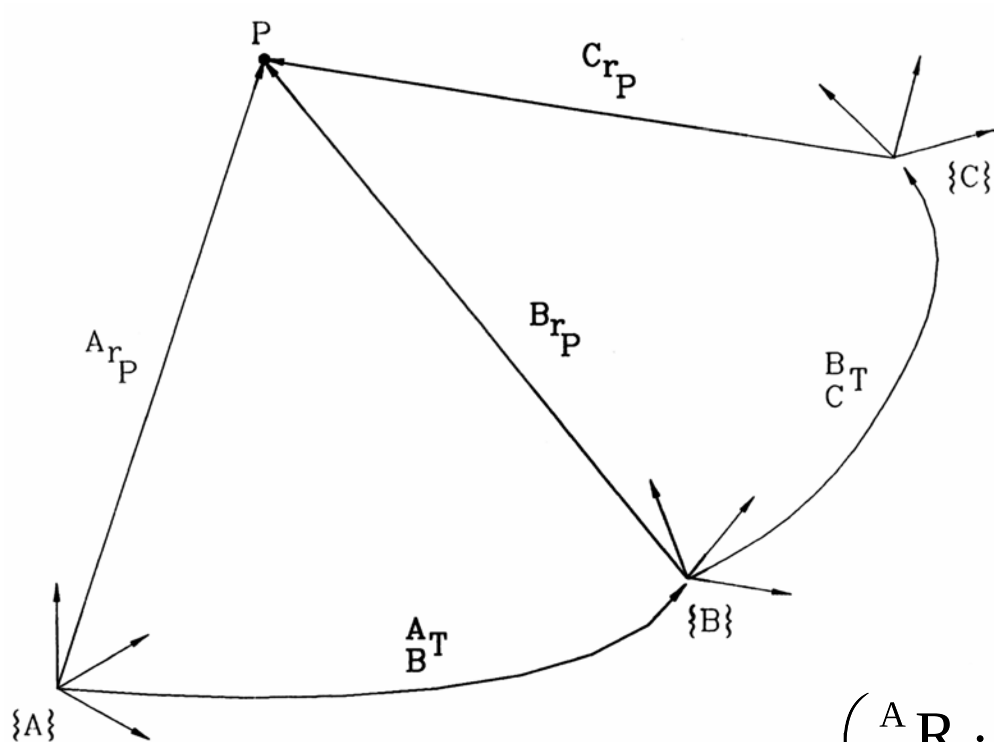
$$ {}^{B}P = {}^{B}_{A}\mathrm{T} \cdot {}^{A}P = \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{T} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \cdot {}^{A}P $$

R – Drehung der Koordinatensysteme gegeneinander

T – Verschiebung des Koordinatenursprungs

Transformationen (33)

Transformationsarithmetik



Geg.: ${}^{C}r_{P}$

Ges.: ${}^{A}r_{P}$

$${}^{B}r_{P} = {}^{B}_{C}\mathrm{T} \cdot {}^{C}r_{P}$$

$${}^{A}r_{P} = {}^{A}_{B}\mathrm{T} \cdot {}^{B}r_{P}$$

$${}^{A}r_{P} = {}^{A}_{B}\mathrm{T} \cdot {}^{B}_{C}\mathrm{T} \cdot {}^{C}r_{P}$$

$${}^{A}_{C}\mathrm{T} = \begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\mathrm{R} \cdot {}^{B}_{C}\mathrm{R} & {}^{A}_{B}\mathrm{R} \cdot {}^{B}r_{O,C} + {}^{A}r_{O,B} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsarithmetik

Inverse Transformation

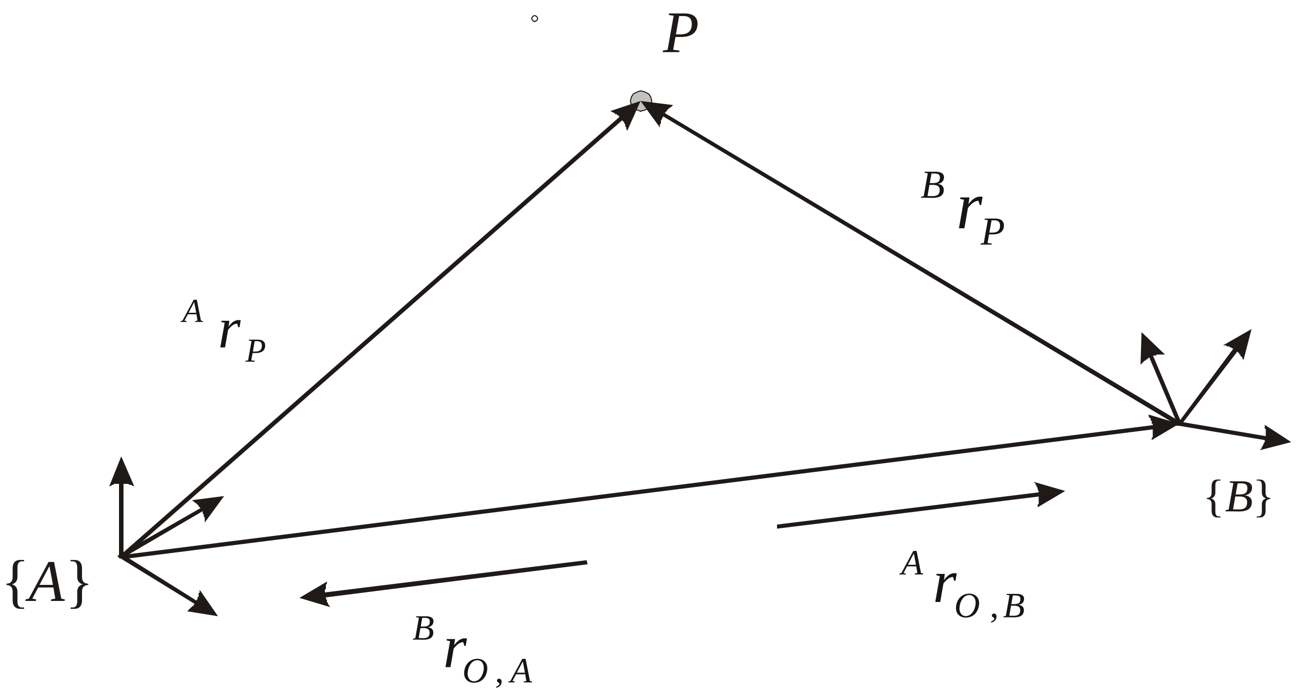
- Transformation in umgekehrter Richtung, z.B. Bestimmung von ${}^{B}_{A}\mathrm{T}$ aus ${}^{A}_{B}\mathrm{T}$

- Einfachster Weg: Inversion der Transformationsmatrix
- Problem: numerische Konditionierung
- Besser: Ausnutzung von Strukturinformationen
- Gesucht:

$$
{}^{B}_{A}\mathrm{T} = \begin{pmatrix} {}^{B}_{A}\mathrm{R} & {}^{B}r_{O,A} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}
$$

Transformationen (35)

Transformationsarithmetik



Transformationen (36)

Transformationsarithmetik

- ${}^B_A R$ kann wie gezeigt durch Transponieren von ${}^A_B R$ gewonnen werden:

  $${}^B_A R = {}^A_B R^T$$

- Es gilt für ${}^A r_P$: $\quad {}^A r_P = {}^A r_{O,B} + {}^B_A R \cdot {}^B r_P$

- Setzt man für den Punkt P den Ursprung von $\{A\}$ ein, so ergibt sich

  $${}^A r_{O,A} = {}^A r_{O,B} + {}^B_A R \cdot {}^B r_{O,A}$$

- Da ${}^A r_{O,A} = 0$ gilt, ergibt sich

  $${}^B r_{O,A} = -{}^B_A R \cdot {}^A r_{O,B} = -{}^A_B R^T \cdot {}^A r_{O,B}$$

- Einsetzen in die Transformation: $\quad {}^B_A \mathrm{T} = \begin{pmatrix} {}^A_B \mathrm{R}^\mathrm{T} & -{}^A_B \mathrm{R}^\mathrm{T} \cdot {}^A r_{O,B} \\ 0^\mathrm{T} & 1 \end{pmatrix}$