

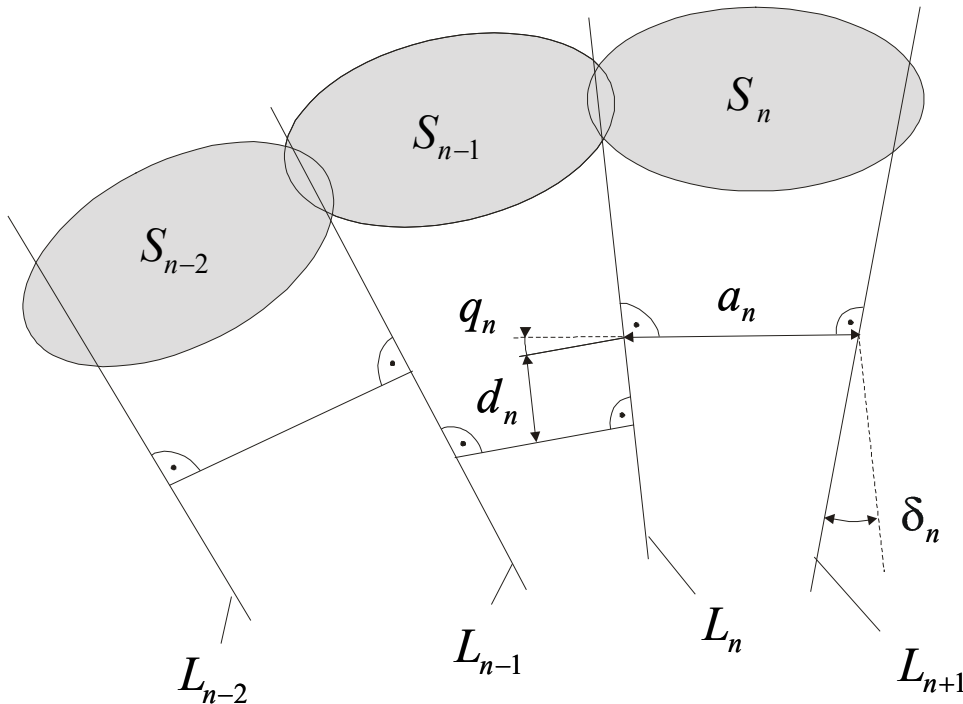
# Kinematik (1)

## Kinematik

- Bisher: Darstellung von Vektoren bei bekannten Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Jetzt: Beschreibung der Bewegung von mechanischen Systemen
- Hier nur Behandlung der Position
- Von Interesse z.B. Position des Endeffektors bzw. Sensors bei bekannten Gelenkwinkeln bzw. Bestimmung der Gelenkwinkel bei gewünschter kartesischer Position
- Beschreibung des mechanischen Systems als Kette von starren Körpern
- Arten von Gelenken: Rotationsgelenke, Schubgelenke

# Kinematik (2)

## Parameter nach Denavit und Hartenberg

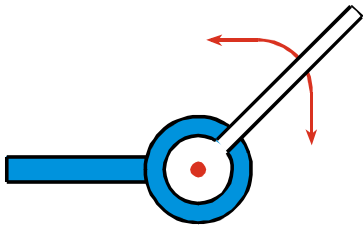


- $a_n$  – kürzester Abstand zw. 2 Achsen eines Segments
- $q_n$  – Drehwinkel um Rotationsachse
- $\delta_n$  – Drehung zweier Achsen gegeneinander
- $d_n$  – Versatz der Längsachsen der Segmente entlang der Drehachse

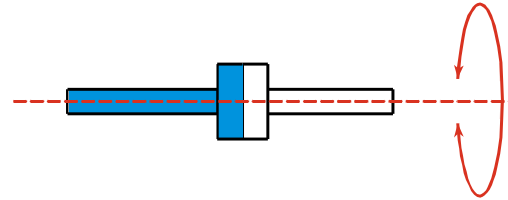
In der Regel ist pro Segment nur 1 Parameter variabel, z.B.  $q_n$  bei Drehgelenken und  $a_n$  bei Schubgelenken.

# Kinematik (2)

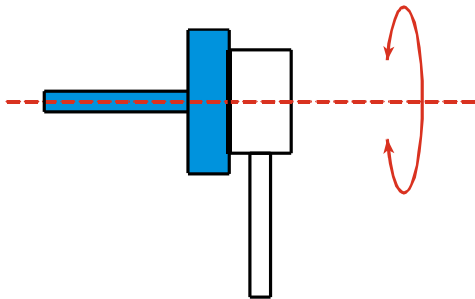
## Beispielgelenke



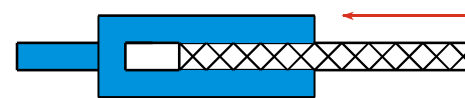
Rotationsgelenk



Torsionsgelenk



Revolvergelenk



Lineargelenk

Diese Gelenke werden durch jeweils einen der DH-Parameter abgebildet.

# Kinematik (3)

## Direkte Kinematik

- Position des Endeffektors / Sensors bei gegebenen Gelenkparametern
- Bei Verwendung von DH-Parametern lässt sich das als Kette von 4 Elementartransformationen angeben

$${}^{n-1}_n\mathbf{T}_n = \text{Rot}(z_{n-1}, q_n) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_n) \cdot \text{Trans}(a_n, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x_n, \delta_n)$$

- Verkettung von mehreren Segmenten lässt sich durch Multiplikation von Segmenttransformationen angeben, z.B.

$${}^0_4\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} \cdot {}^3_4\mathbf{T}$$

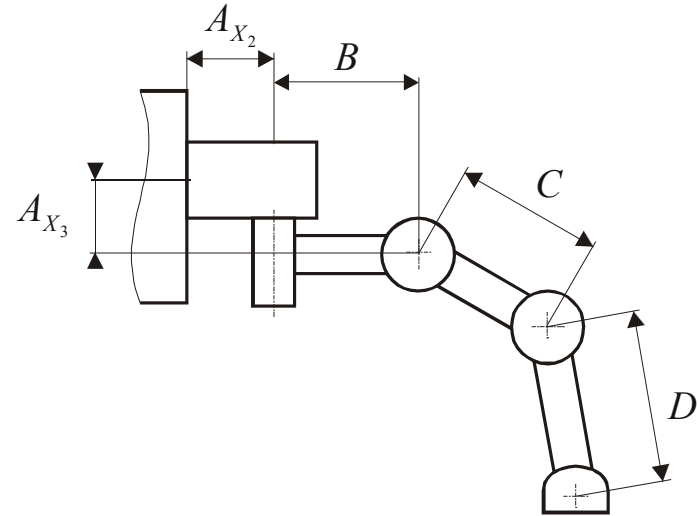
- Einfach zu realisieren
- Mit gegebenen Gelenkparametern lässt sich die kinematische Konfiguration eindeutig und systematisch beschreiben

# Kinematik (4)

## Beispiel für Direkte Kinematik

- DH-Parameter für ein Roboterbein

Link	$a_n$	$\delta_n$	$d_n$	$q_n$
1	$A_{x2}$	$\pi/2$	0	0
2	$B$	$-\pi/2$	$A_{x3}$	$\alpha$
3	$C$	0	0	$\beta$
4	$D$	0	0	$\gamma$



- Verkettung der Teiltransformationen

$$\begin{aligned} {}^0_4T &= \text{Trans}(A_{x2}, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x_1, 90^\circ) \cdot \\ &\quad \text{Rot}(z_1, \alpha) \cdot \text{Trans}(0, 0, A_{x3}) \cdot \text{Trans}(B, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x_2, -90^\circ) \cdot \\ &\quad \text{Rot}(z_2, \beta) \cdot \text{Trans}(C, 0, 0) \cdot \\ &\quad \text{Rot}(z_3, \gamma) \cdot \text{Trans}(D, 0, 0) \end{aligned}$$

# Kinematik (5)

## Beispiel für Direkte Kinematik

- Berechnung der Lösung durch Multiplikation der Transformationsmatrizen

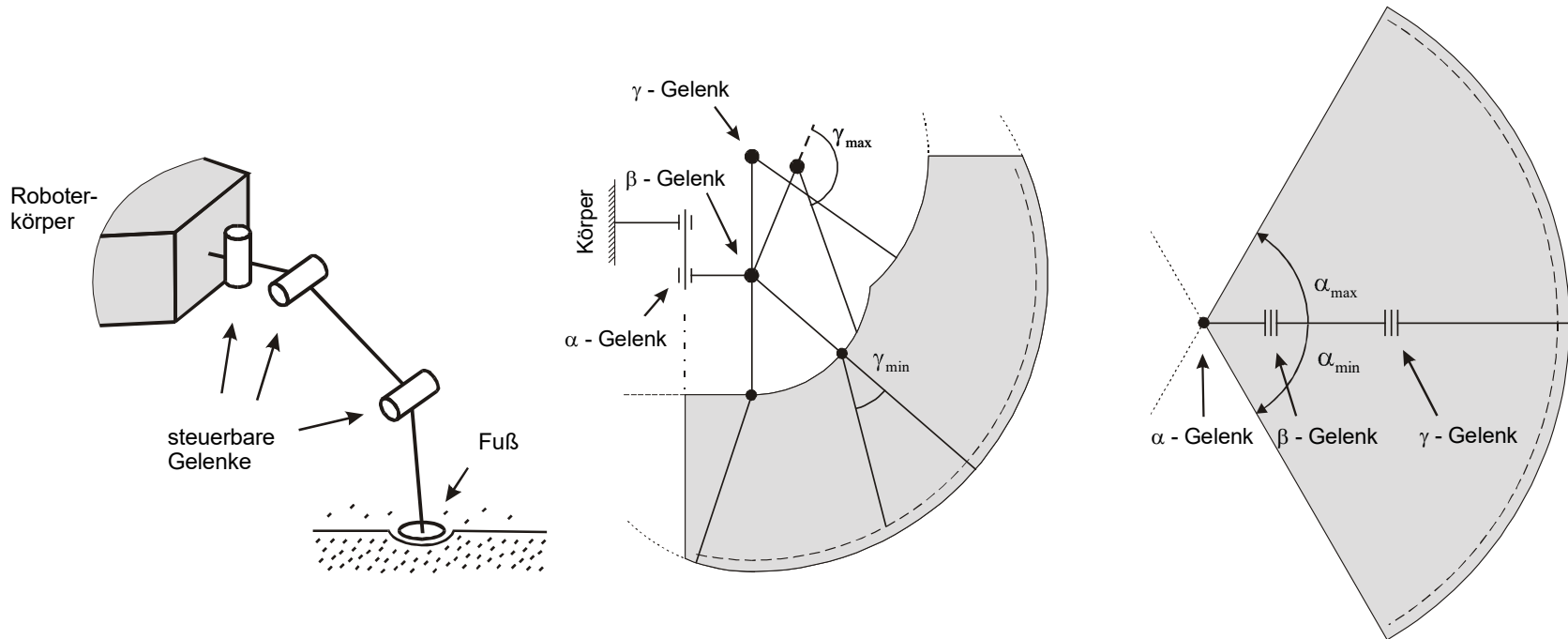
$${}^0_4\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} (B + C \cdot \cos(\beta) + D \cdot \cos(\beta + \gamma)) \cdot \sin(\alpha) \\ A_{X_2} + (B + C \cdot \cos(\beta) + D \cdot \cos(\beta + \gamma)) \cdot \cos(\alpha) \\ A_{X_3} + C \cdot \sin(\beta) + D \cdot \sin(\beta + \gamma) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta + \gamma) & -\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta + \gamma) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta + \gamma) & \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta + \gamma) \\ 0 & -\cos(\beta + \gamma) & \sin(\beta + \gamma) \end{pmatrix}$$

- In diesem Fall interessiert nur die Position des Fußendes, also der Vektor  $\mathbf{T}$ .

# Kinematik (6)

## Inverse Kinematik

- Gelenkparameter bei gegebener Position des Endeffektors / Sensors
- Nicht jeder beliebigen Position lässt sich eine Gelenkposition zuordnen
- Entscheidend: Arbeitsraum

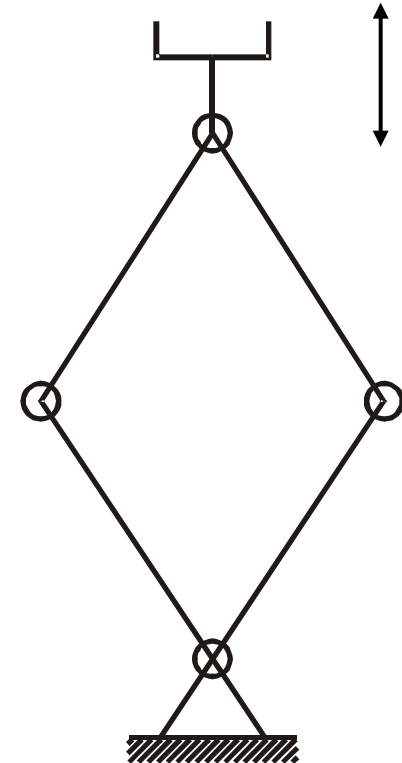


Arbeitsraum am Beispiel eines Roboterbeines

# Kinematik (7)

## Inverse Kinematik

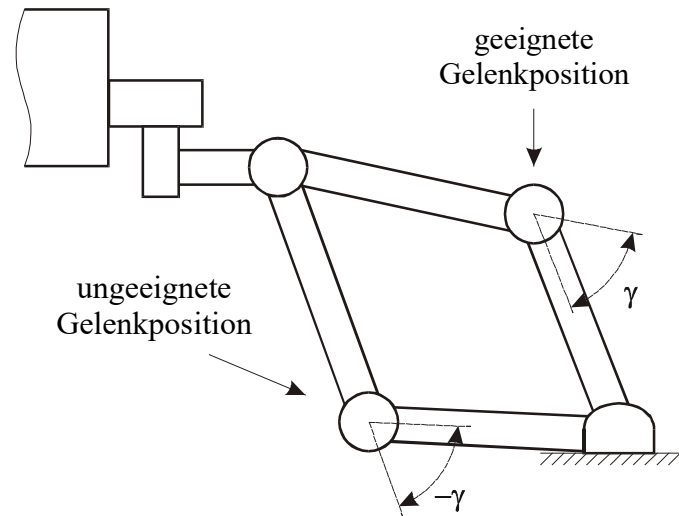
- Oft ist es nicht möglich, einer kartesischen Position eine Gelenkposition zuzuordnen
  - Mehrere Lösungen, z.B. bei parallelen Gelenkachsen
  - Bei sog. Singularitäten kann es unendlich viele Lösungen geben
  - In der Nähe von Singularitäten können kleine Änderungen der kartesischen Position sehr große Änderungen der Gelenkwinkel bewirken





# Kinematik (8)

## Inverse Kinematik



- Welche Stellung richtig ist, lässt sich nicht generell entscheiden
- Folgende Strategien sind möglich:
  - Einführung von Vorzugsrichtungen
  - Nutzung der vorhergehenden Stellung: welche der Lösungen ist der vorhergehenden Stellung am nächsten?
  - Minimierung der Orientierungsänderung bestimmter Achsen
  - Erkennen von Hindernissen und deren Umgehung durch Auswahl einer geeigneten Lösung

# Kinematik (9)

## Inverse Kinematik

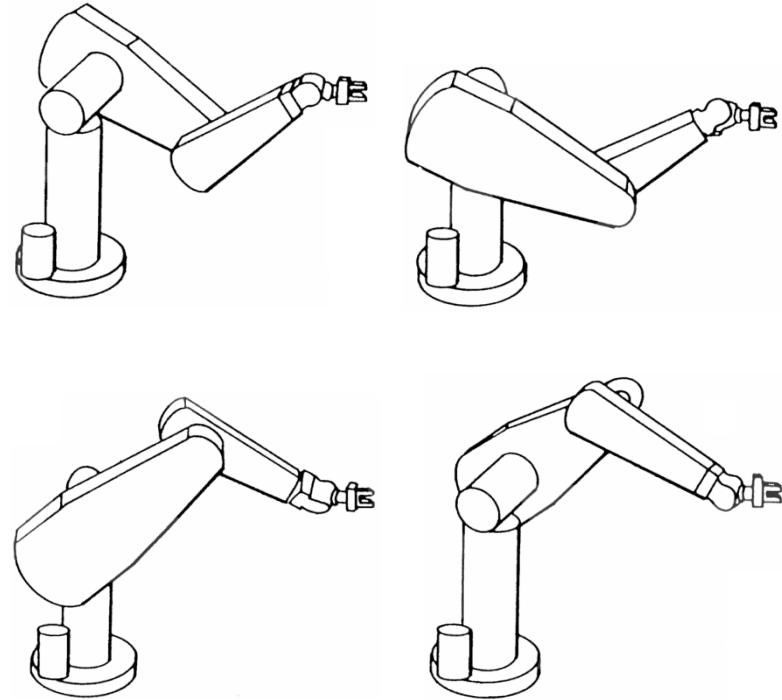
Anzahl der Lösungen abhängig von:

- Anzahl der Roboterachsen
- Anzahl der Achsparameter ungleich 0
- Arbeitsbereiche der Achsen

$$a = \sin(q) \rightarrow q = \arcsin(a)$$

Lösungsmethoden:

- Inverse trigonometrische Funktion sind nicht eindeutig
- Auswahl einer der möglichen Lösungen
- Statt  $\text{atan}()$  Verwendung von  $\text{atan2}()$



## Redundanz

- Bei mehreren parallelen Achsen lassen sich unendlich viele Lösungen finden
- Kinematische Redundanz  $\rightarrow$  spezielle Strategien erforderlich

# Kinematik (10)

## Beispiel für Inverse Kinematik

- Auflösen der Gleichungen der Direkten Kinematik für die Gelenkwinkel
- die zu lösenden Gleichungen sind nichtlinear und somit kann nicht immer eine geschlossene Lösung gefunden werden
- es existieren mehrfache Lösungen
- es können unendlich viele Lösungen existieren, z.B. bei kinematisch redundanten Strukturen
- es ist möglich, dass in Abhängigkeit von mechanischen Randbedingungen keine zulässige Lösung existiert
- Analytische Lösung ist vorzuziehen, da sich diese effizient berechnen läßt

# Kinematik (11)

## Beispiel für Inverse Kinematik

Zerlegen des 3D-Koordinatensystems in zwei 2D-Koordinatensysteme

1. Ein XY-System, das sich auf der von der  $X_1$ - und  $X_2$ -Achse des vom kartesischen Koordinatensystems aufgespannten Ebene befindet und dessen Ursprung auf der ersten Gelenkachse liegt ( $X_1$ - $X_2$ -Ebene)
2. Ein RZ-System, das sich auf der von der Normalen der ersten Gelenkachse zum nächsten Gelenk (R) und der Achse des ersten Gelenkes aufgespannten Ebene liegt (Z) und dessen Ursprung auf dem Schnittpunkt zwischen zweiter Gelenkachse und der Normalen bzw. der Ebene liegt.

# Kinematik (12)

## Beispiel für Inverse Kinematik

- Bestimmung des ersten Gelenkwinkels im XY-System

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\alpha) \\ r \cdot \cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Translation vom Beinbefestigungspunkt zum Ursprung des XY-Systems

$${}^{XY}_B \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

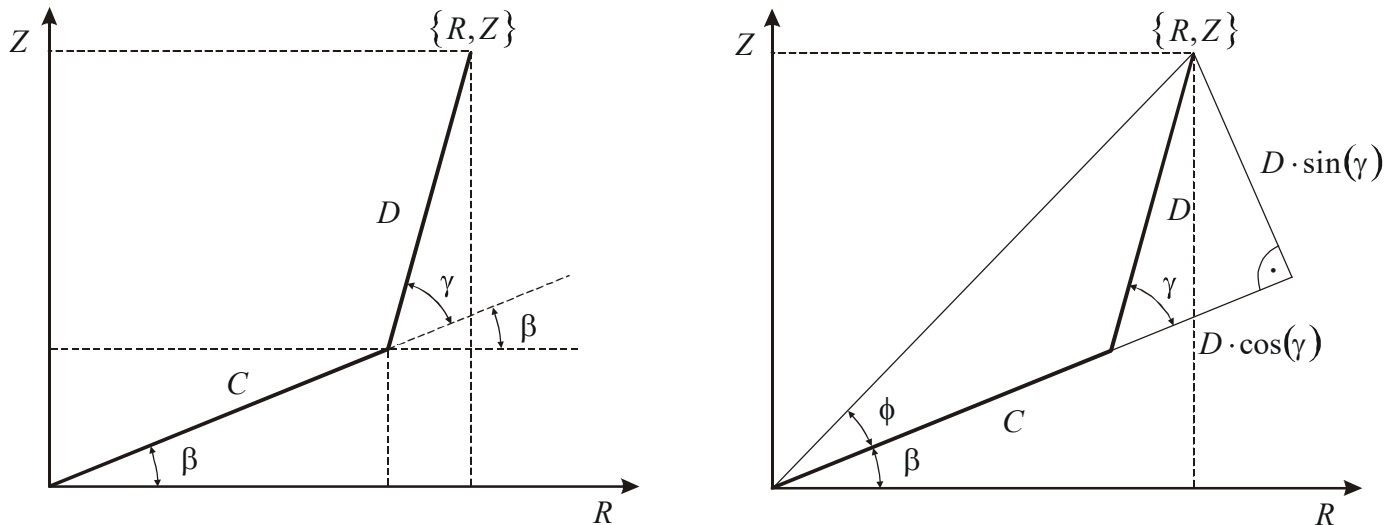
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{XY}_B \mathbf{T} \cdot {}^B \vec{r}_{O,F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - A_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Lösung für Gelenkwinkel  $\alpha$ : 
$$\alpha = \arctan\left(\frac{X}{Y}\right) = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2 - A_{x_2}}\right)$$

# Kinematik (13)

## Beispiel für Inverse Kinematik

- Geometrische Beziehungen im RZ-System



- Bestimmung der fehlenden Gelenkwinkel beta und gamma:

$$\begin{pmatrix} R \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot \cos(\beta) + D \cdot \cos(\beta + \gamma) \\ C \cdot \sin(\beta) + D \cdot \sin(\beta + \gamma) \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Kinematik (14)

## Beispiel für Inverse Kinematik

- Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{pmatrix} R \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot \cos(\beta) + D \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) - D \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ C \cdot \sin(\beta) + D \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) + D \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Quadrieren der Gleichungen für  $R$  und  $Z$  und Addition:

$$R^2 + Z^2 = C^2 + 2 \cdot C \cdot D \cdot \cos(\gamma) + D^2$$

- Lösung für Gelenkwinkel  $\gamma$ :

$$\gamma = \arccos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 + Z^2 - C^2 - D^2}{C \cdot D}\right)$$

# Kinematik (15)

## Beispiel für Inverse Kinematik

- Aus den geometrischen Beziehungen und Additionstheoremen folgt:

$$\frac{Z}{R} = \tan(\phi + \beta) = \frac{\tan(\phi) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\phi) \cdot \tan(\beta)} \quad \text{mit} \quad \tan(\phi) = \frac{D \cdot \sin(\gamma)}{C + D \cdot \cos(\gamma)}$$

- Lösung für Gelenkwinkel  $\beta$ :

$$\beta = \arctan\left(\frac{Z \cdot C + Z \cdot D \cdot \cos(\gamma) - R \cdot D \cdot \sin(\gamma)}{R \cdot C + R \cdot D \cdot \cos(\gamma) + Z \cdot D \cdot \sin(\gamma)}\right)$$

- Gewinnung von R aus dem Beinkoordinatensystem

$$Z = r_{x_3} - A_{x_3} \quad R^2 = X^2 + Y^2$$

$$R = \sqrt{r_{x_1}^2 + (r_{x_2} - A_{x_2})^2} - B$$



# Kinematik (16)

## Beispiel für Inverse Kinematik

### Existenz von Lösungen

- $C + D \cdot \cos(\gamma) = 0$  und  $\sin(\gamma) = 0$

Dieser Fall tritt nur bei  $\gamma=180^\circ$  und  $C=D$  auf. Das bedeutet, dass das Beinende auf der  $\beta$ -Achse liegt. Dieser Fall kann durch Fallprüfung ausgeschlossen werden. Außerdem ist diese Lösung mechanisch nicht sinnvoll.

- $R = 0$  und  $Z = 0$

Der Fuß liegt auf der Beta-Achse, das heißt  $\gamma=180^\circ$ . Das kann durch Fallprüfung ausgeschlossen werden. Außerdem ist diese Lösung mechanisch nicht sinnvoll.

# Kinematik (17)

## Beispiel für Inverse Kinematik

### Eindeutigkeit der Lösungen

- Siehe allgemeine Betrachtungen weiter vorn
- Begrenzung von  $\gamma$  auf positive Werte  
 $0^\circ \leq \gamma \leq \pi$
- Mehrdeutigkeit durch Wurzeln  
Beschränkung auf  $x_2 - A_{x_2} > 0$
- Bei  $x_2 - A_{x_2} = 0$  und  $x_1 = 0$  kann  $\alpha$  nicht bestimmt werden, da  $\text{atan}(\alpha)$  als Quotient dieser beiden Terme nicht definiert ist  $\rightarrow \alpha$  kann beliebig sein

### Zulässigkeit der Lösungen

- Einschränkungen des Arbeitsraumes  
 $-60^\circ \leq \alpha \leq +60^\circ$   
 $-30^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$   
 $-0^\circ \leq \gamma \leq +90^\circ$

# Kinematik (18)

## Differentielle Bewegungsvorgänge – Jacobimatrix

- Lösen der Inversen Kinematik durch differentielle Vorgehensweise
- Betrachtung der Vektorfunktion  $y$  mit 6 Variablen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_5 = f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

bzw.

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$$

# Kinematik (19)

## Differentielle Bewegungsvorgänge – Jacobimatrix

- Differential der Vektorfunktion

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} dx_6 \\ &\vdots \\ dy_6 &= \frac{\partial f_6}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} dx_6 \end{aligned}$$

- Jacobi-Matrix  $J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{pmatrix}$

- Sind die Funktionen  $f$  in  $\mathbf{x}$  nichtlinear, ist  $J$  eine Funktion von  $x$ :  $d\mathbf{y} = J(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

# Kinematik (20)

## Differentielle Bewegungsvorgänge – Transformationsbeziehungen

- Jacobi-Matrix kann zur Transformation von kartesischen Koordinaten in Achskoordinaten genutzt werden

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

- $\vec{s}$  entspricht der Lage und Orientierung des Greifers,  $\vec{q}$  ist der allgemeine Achskoordinatenvektor
- Abbildung des Raumes des Achskoordinatenvektors in den kartesischen Raum:

$$d\mathbf{s} = J(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

- Berechnung der Achskoordinaten aus kartesischen Koordinaten

$$d\mathbf{q} = J^{-1}(\mathbf{q}) d\mathbf{s}$$

# Kinematik (21)

## Differentielle Bewegungsvorgänge – Transformationsbeziehungen

- Lösung des Problems der Inversen Kinematik durch einfache Matrixmultiplikation
- 1. Problem:
  - $J$  ist konfigurationsabhängig  $\rightarrow$  Fehler bei abweichenden Konfigurationen
  - Problem: Wann muss  $J$  neu berechnet werden?
- 2. Problem:
  - Bestimmung von  $J \rightarrow$  numerische Berechnung von  $J^{-1}$
  - Bekannte Probleme der numerischen Inversion
- Division durch differentielle Zeiteinheit  $dt \rightarrow$  Abbildung von Geschwindigkeiten:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = J(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad \text{mit} \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$$

$v_x, v_y, v_z$  – kartesische bzw. lineare Geschwindigkeit

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – Winkelgeschwindigkeit

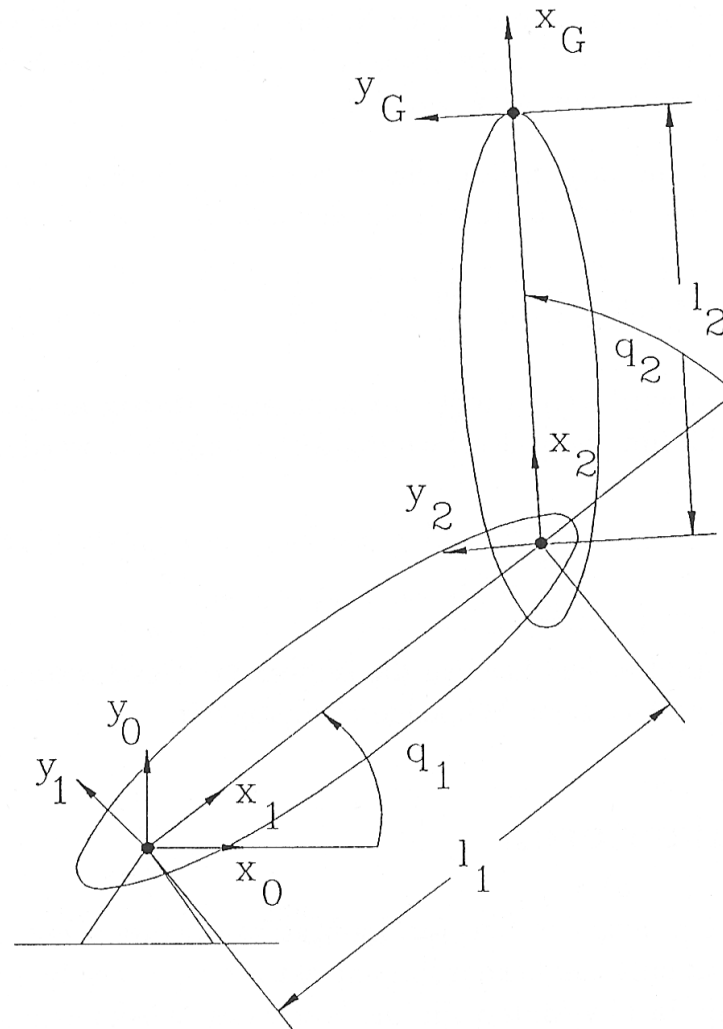
# Kinematik (22)

## Differentielle Bewegungsvorgänge – Singularitäten

- Frage: Ist die Jacobi-Matrix für alle Werte des Achskoordinatenvektors invertierbar?
- Bei Verlust von Freiheitsgraden → Roboter „degeneriert“
- $J$  wird in diesen Fällen singular →  $J$  nicht mehr invertierbar
- Mögliche Fälle:
  - Arbeitsraumgrenze: es kann nur noch in bestimmte Richtungen weitergefahren werden
  - Achsen haben gleiche Orientierung: Drehung kann durch eine Achse oder mehrere Achsen gleichzeitig erfolgen

# Kinematik (23)

## Beispiel Zweiarm-Manipulator





# Kinematik (24)

## Beispiel Zweiarm-Manipulator

- Jacobi-Matrix:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -l_1 \cdot \sin(q_1) - l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

- Determinante:

$$\det J(\mathbf{q}) = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(q_2)$$

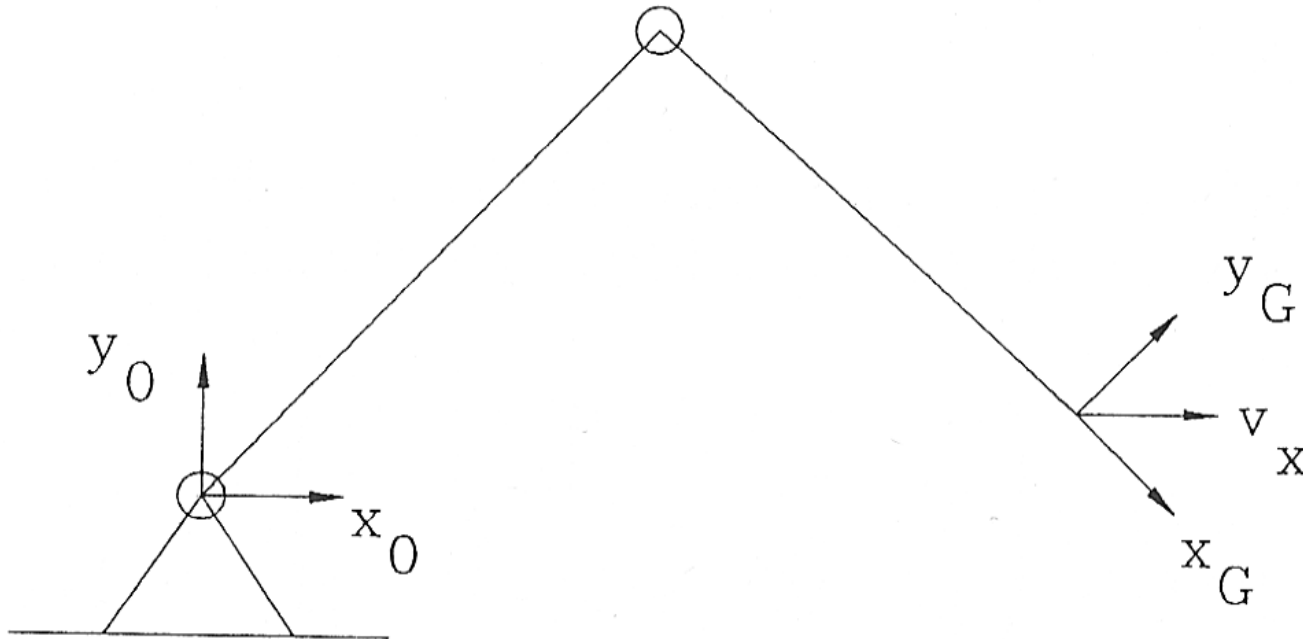
→  $\det J(\mathbf{q}) = 0$  wenn  $\sin(q_2) = 0 \rightarrow q_2 = 0^\circ$  oder  $q_2 = 180^\circ$

- bei  $q_2 = 0^\circ$  ist der Arm voll ausgestreckt, bei  $q_2 = 180^\circ$  ist der Arm eingefaltet

# Kinematik (25)

## Beispiel Zweiarm-Manipulator

- in der Nähe von Singularitäten werden die Achsgeschwindigkeiten sehr groß
- Beispiel:



# Kinematik (26)

## Beispiel Zweiarm-Manipulator

- Bestimmung der Achsgeschwindigkeiten mit Hilfe der Jacobi-Matrix:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = J^{-1}(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

- für  $J^{-1}(\mathbf{q})$  ergibt sich:

$$J^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(q_2)} \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cdot \cos(q_1) - l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) & -l_1 \cdot \sin(q_1) - l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

- mit den Achsgeschwindigkeiten  $\frac{d\mathbf{s}}{dt} = (1 \ 0)^T$

- ergibt sich  $\omega_1 = \dot{q}_1 = \frac{\cos(q_1 + q_2)}{l_2 \cdot \sin(q_2)}$   $\omega_2 = \dot{q}_2 = -\frac{\cos(q_1)}{l_2 \cdot \sin(q_2)} - \frac{\cos(q_1 + q_2)}{l_2 \cdot \sin(q_2)}$

→ geht  $\sin(q_2) \rightarrow 0$  folgt  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \rightarrow \infty$  für die Gelenkgeschwindigkeiten

# Kinematik (27)

## Weitere Schritte ...

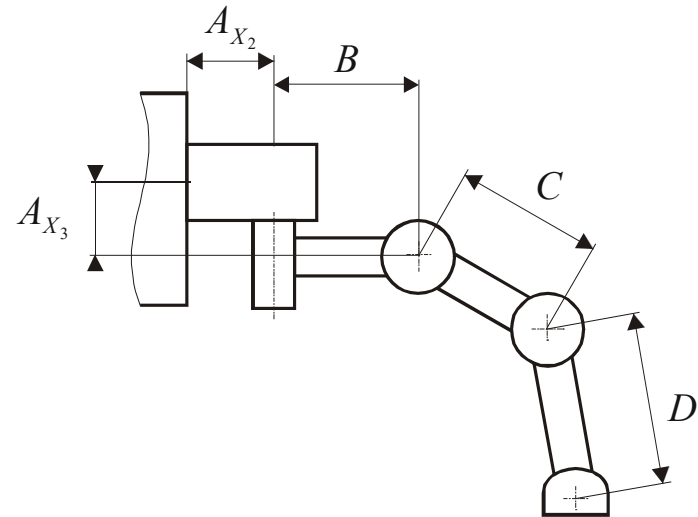
- Jetzt kennen wir die Geschwindigkeiten bestimmen
- Für ein inverses Pendel müssen wir aber noch die Momente Berechnen, die zum Aufrichten benötigt werden
- Kräfte und Momente sorgen für eine Beschleunigung
- → nach der Betrachtung für die Geschwindigkeit müssen mittels der zweiten Ableitung auch noch die Beschleunigungen bestimmt werden

## Beispiel zur Anwendung eines inversen Pendels



# Beispiel

Link	$a_n$	$\delta_n$	$d_n$	$q_n$
1	$A_{x2}$	$\pi/2$	0	0
2	$B$	$-\pi/2$	$A_{x3}$	$\alpha$
3	$C$	0	0	$\beta$
4	$D$	0	0	$\gamma$



Konstruktionsparameter:

$$A_{x1} = A_{x2} = A_{x3} = 0$$

$$B = 50 \quad C = 110 \quad D = 200$$

Bestimmen Sie die Gleichungen für die Direkte und die Inverse Kinematik.

Gehen Sie von den Gelenkpositionen  $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$  und  $\gamma=45^\circ$  aus. Bestimmen Sie die kartesische Position des Fußpunktes in Beinkoordinaten.

Setzen Sie für die kartesische Variable  $x_1$  Werte ein und lassen diese Variable laufen.

Wie lang kann eine Trajektorie durch den Punkt parallel zur  $x_1$ -Achse maximal sein?